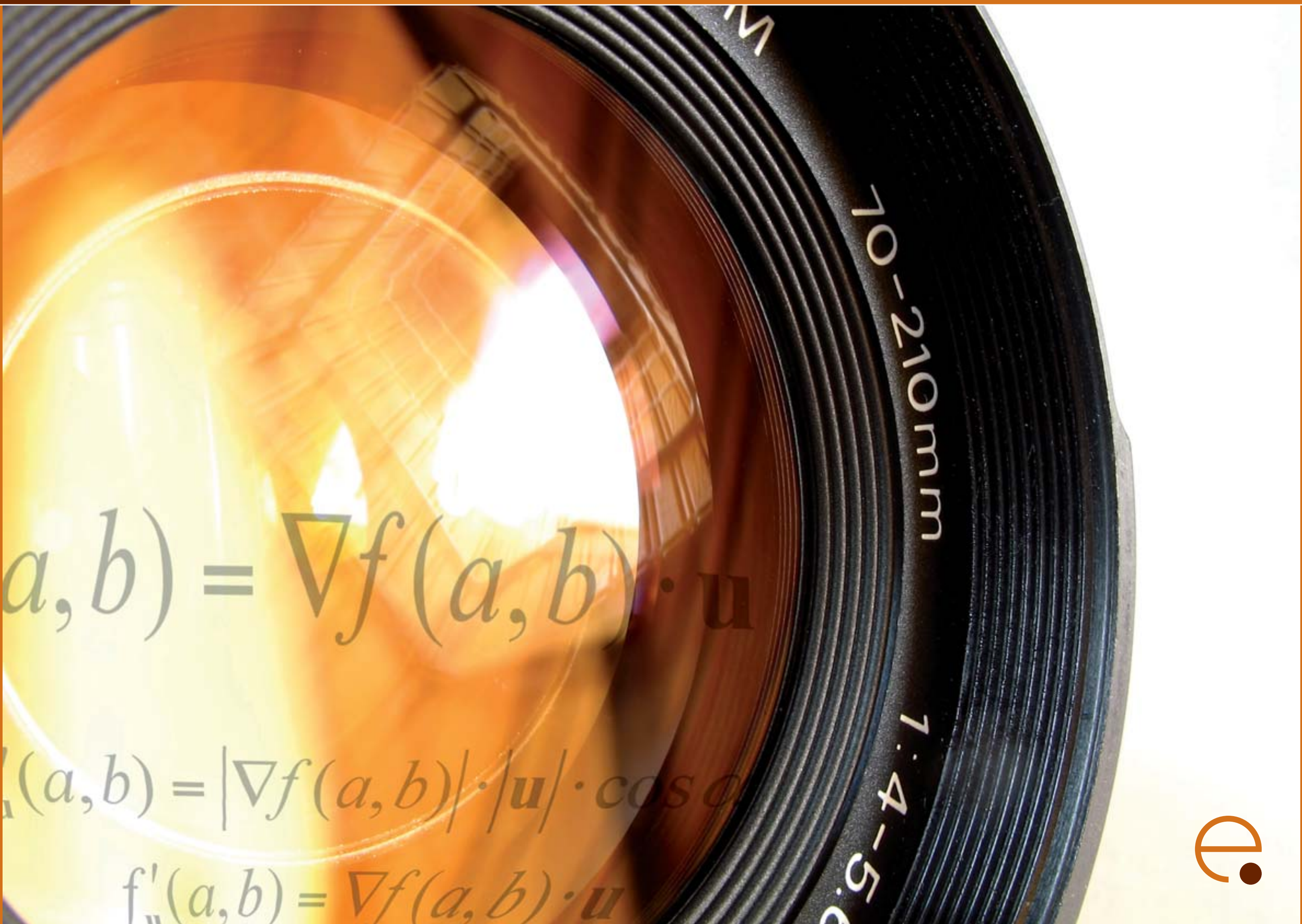
TEMES CLAU

Maria José Álvarez Quetglas
Santiago Forcada Plaza
Enric Monsó Burgués
Teresa Navarro Gonzalo
Miquel Ralló Capdevila
Assumpta Sabater Pruna

MATEMÀTIQUES

PER A L'ÒPTICA I L'OPTOMETRIA



TEMES CLAU 07

MATEMÀTIQUES
PER A L'ÒPTICA I L'OPTOMETRIA

Maria José Álvarez Quetglas
Santiago Forcada Plaza
Enric Monsó Burgués
Teresa Navarro Gonzalo
Miquel Ralló Capdevila
Assumpta Sabater Pruna

Edicions UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Disseny de la coberta: Ernest Castelltort
Disseny de col·lecció: Tono Cristòfol
Maquetació: Mercè Aicart

Primera edició: setembre de 2008

Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 137 540 Fax: 934 137 541
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.edu

Producció: Barcelona Digital, S.L.
Rosselló 77
08029 Barcelona

Dipòsit legal: B-15806-2008
ISBN: 978-84-8301-960-3

Índex

Introducció

Aquest llibre és el resultat de molts anys d'experiència dels autors en la docència de l'assignatura Matemàtiques I de l'Escola Universitària d'Òptica i Optometria de Terrassa (EUOOT) de la UPC, com també en d'altres assignatures de continguts similars. L'EUOOT ha impartit durant molts anys la Diplomatura d'Òptica i Optometria de forma presencial i ara fa dos anys va incorporar també una modalitat semipresencial de la mateixa titulació. La no-presencialitat de gran part de la docència en aquesta modalitat en l'assignatura de Matemàtiques I va significar un augment considerable de material didàctic, el qual ha estat l'embrió per a l'edició d'aquesta obra.

Aquest llibre té com a objectiu principal facilitar l'aprenentatge del seu contingut a les lectores i els lectors, i per a això pretén sobretot ser entenedor. Amb aquest propòsit, les explicacions teòriques s'acompanyen amb molts exemples i moltes il·lustracions gràfiques dels conceptes i les propietats explicades. S'ha procurat optar pel llenguatge senzill en lloc del formalisme, sense oblidar el necessari rigor científic. Només s'hi incorporen les justificacions de les propietats quan això n'afavoreix la comprensió o utilització dels resultats, i l'èmfasi sempre es fa en aquests resultats.

Pel mateix motiu, cada apartat comença amb una relació dels seus objectius concrets d'aprenentatge, amb vista a destacar-ne les parts més essencials i orientar el treball dels estudiants. Al final de cada apartat es presenten una sèrie de problemes resolts, seguits per problemes proposats, dels quals es donen les solucions. Finalment, com a annexos al llibre es faciliten uns arxius amb guions de pràctiques per fer amb ordinador (programa Maple), que completen la part de problemes.

El contingut d'aquesta obra comprèn temes de trigonometria i de càlcul diferencial de funcions d'una variable i de diverses variables. Aquest és el contingut de l'assignatura, que és part de les matemàtiques que s'estudien a la titulació. El seguiment del llibre requereix coneixements previs de matemàtiques a nivell d'ensenyament secundari. Tot i així, alguns temes de secundària es repassen de forma completa, ja que són fonamentals per al seguiment del llibre. En particular, al primer i segon capítols hi ha parts que són de repàs; en canvi, els capítols tercer i quart correspon a temari completament nou.

A més dels que estan específicament lligats als coneixements anteriors, és també un objectiu aconseguir les habilitats d'aplicar els coneixements matemàtics a la resolució de problemes, a identificar i descriure models, i a predir resultats. I també es pretén contribuir a desenvolupar les capacitats següents: reconèixer i investigar problemes; saber accedir a la informació adequada; expressar, processar, establir relacions i interpretar informació i idees; formular i proposar solucions; comunicar els resultats; treballar en grup, i treballar amb àrees de coneixement diverses.

El seguiment i l'aprenentatge d'aquest llibre s'estima que requereix, de mitjana unes 70 hores, repartides en 14 setmanes. Els capítols no tenen una llargada uniforme: el primer capítol comporta unes 17 hores d'estudi, el segon és el més llarg i s'estima en unes 25 hores, el tercer és curt i amb unes 8 hores n'hi ha prou, i l'últim capítol necessita unes 20 hores. En general, per a cada capítol es preveu el repartiment següent: un 40 % del temps per a l'estudi de la teoria; un altre 40 % per a la resolució i comprovació de problemes, i un 20 % per a la realització de pràctiques amb ordinador.

Les autores i els autors volem agrair a tot el professorat de la Secció del Campus de Terrassa del Departament de Matemàtica III de la UPC el suport i l'ajut en la realització del llibre. En especial, agraïm a la professora Roser Guàrdia i Riera i al professor Víctor Mañosa i Fernández la seva contribució en l'elaboració dels guions de pràctiques. També el nostre agraïment a l'Escola Universitària d'Òptica i Optometria de Terrassa, al Departament de Matemàtica Aplicada III i al Campus de Terrassa, per les infraestructures i els serveis que posen a la nostra disposició i que han permès realitzar aquesta obra.

1 Geometria del pla

En aquest capítol, es tracten diversos temes de la geometria plana que són útils per a l'estudi de l'Òptica i la Optometria o per al seguiment dels capítols posteriors d'aquest llibre. Les dues primeres seccions tracten amb una certa profunditat la trigonometria i les funcions trigonomètriques, mentre que el tercer apartat fa una introducció breu d'altres elements geomètrics, com vectors, punts, rectes i circumferències.

1.1 Angles i triangles

En aquest apartat, es repassen conceptes bàsics de trigonometria. Es comença amb el concepte d'angle fins arribar a definir i representar gràficament les raons trigonomètriques d'un angle comprès entre 0 i $\pi/2$ radians. Els triangles juguen un paper principal en aquest apartat, especialment els rectangles.

Els objectius específics d'aquest apartat són:

– Conèixer els conceptes d'angle, suma d'angles i mesura d'un angle.
– Identificar angles iguals.
– Trobar la mesura d'angles utilitzant propietats geomètriques.
– Identificar triangles semblants.
– Conèixer les relacions entre els angles i els costats d'un triangle.
– Calcular les longituds dels costats d'un triangle semblant a un altre, quan sigui possible.
– Representar gràficament les raons trigonomètriques d'un angle agut.

1.1.1 Concepte d'angle. Igualtat. Propietats

Dues rectes contingudes en un pla només poden ser paral·leles o incidents, tal com mostra la figura 1.1.1.

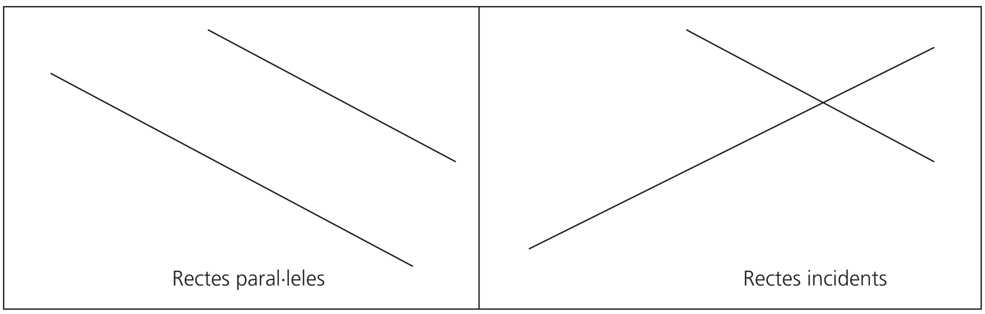


Fig. 1.1.1 Posicions relatives de dues rectes

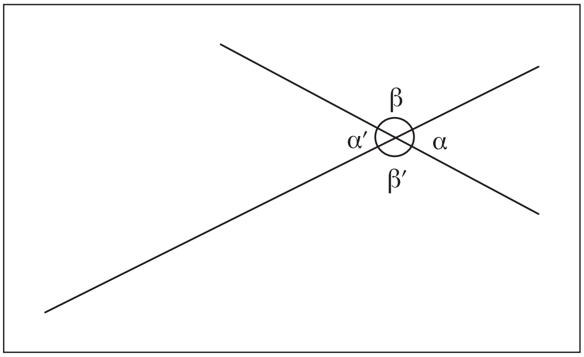


Fig. 1.1.2 Quatre angles determinats per dues rectes i el seu vèrtex comú

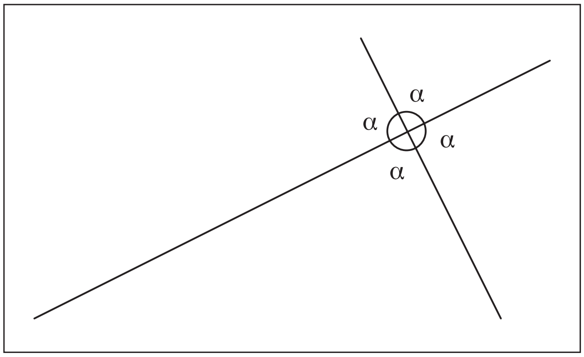


Fig. 1.1.3 Quatre angles rectes

Quan dues rectes són incidents, determinen quatre *angles* (Fig. 1.1.2). El punt d'intersecció de les rectes és el *vèrtex* de cadascun d'aquests quatre angles. Cada angle està determinat per dues semirectes amb origen en aquest vèrtex.

Els angles α i β de la figura 1.1.2 comparteixen el vèrtex i una de les semirectes que els determinen; en aquest cas, s'anomenen *angles consecutius*. També són consecutius β i α', α' i β', així com β' i α. Els angles α i α' són *angles oposats pel vèrtex*. També són oposats pel vèrtex els angles β i β'.

Dos *angles són iguals* quan es poden superposar mitjançant desplaçaments o girs.

Propietat dels angles oposats pel vèrtex

Dos angles oposats pel vèrtex són iguals, és a dir, $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$

Quan els quatre angles formats per dues rectes incidents són iguals, s'anomenen *angles rectes* (Fig. 1.1.3).

La propietat següent indica algunes relacions d'igualtat entre angles segons la forma d'obtenir-los.

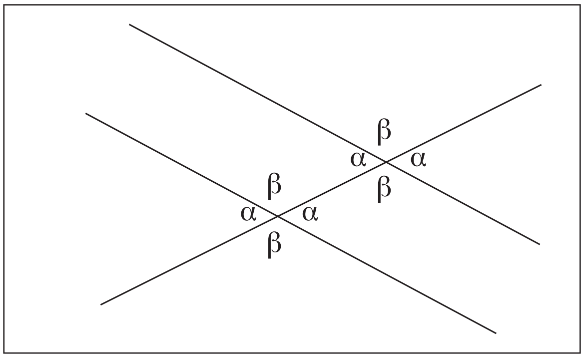


Fig. 1.1.4 Igualtat d'angles corresponents en tallar dues rectes paral·leles

Propietat dels angles formats en tallar rectes paral·leles

Quan una recta talla dues rectes paral·leles, els angles que tenen el vèrtex en una de les paral·leles coincideixen, de forma corresponent, amb els angles que tenen el vèrtex en l'altra recta paral·lela, tal com mostra la figura 1.1.4.

1.1.2 Suma d'angles. Mesura d'angles

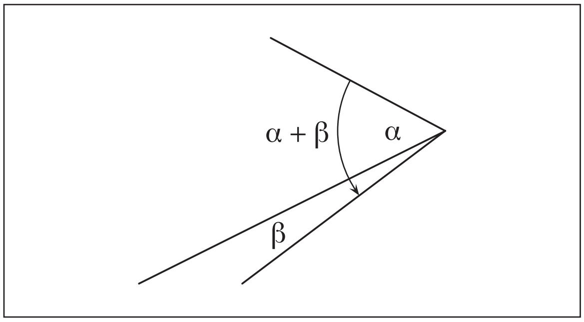


Fig. 1.1.5 Suma de dos angles consecutius

La *suma de dos angles consecutius* α i β és l'angle determinat per les dues semirectes que no comparteixen. La suma de dos angles s'il·lustra a la figura 1.1.5. Per a sumar dos angles és necessari desplaçar-los i girar-los per tal que resultin consecutius.

La *mesura dels angles* s'estableix a partir de la base següent: la suma dels quatre angles determinats per dues rectes incidents és, per definició, igual a 360 graus o 2π radians. Així, resulta que un angle recte mesura 90 graus o $\frac{\pi}{2}$ radians, la quarta part de la suma total.

En el cas de dues rectes incidents, la suma de dos angles consecutius és exactament igual a la meitat de la suma dels quatre angles; per tant, és 180 graus o π radians. Dos angles consecutius que sumin 180 graus o π radians s'anomenen *angles adjacents*.

Per a convertir la mesura d'un angle a graus o radians, s'apliquen les proporcionalitats següents:

Canvi d'unitats de mesura dels angles

Per a passar de graus a radians, s'ha de multiplicar per $\dfrac{\pi}{180}$

Per a passar de radians a graus, s'ha de multiplicar per $\dfrac{180}{\pi}$

Exemples

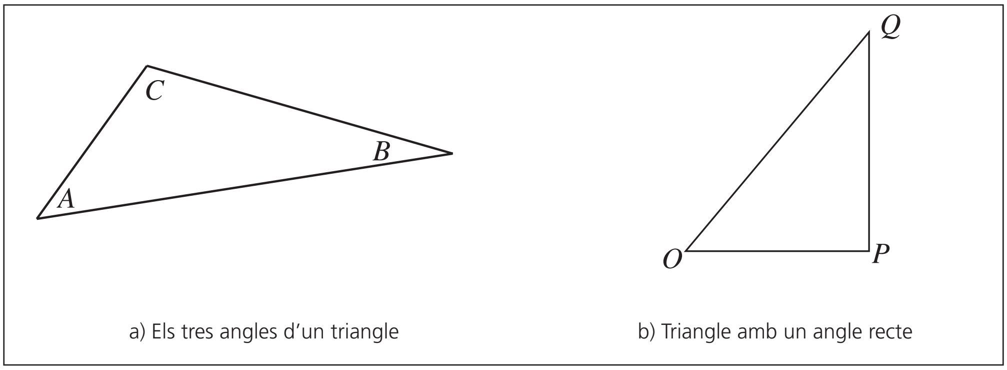
- Si $\alpha = 50°$, aleshores $\alpha = 50° \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{5\pi}{18}$ radians
- Si $\beta = \dfrac{\pi}{7}$ radians, aleshores $\beta = \dfrac{\pi}{7}\dfrac{180}{\pi} = \dfrac{180}{7}$ graus

Els angles s'anomenen, segons les seves mesures:

– *Angles aguts*, quan són inferiors a 90 graus o $\pi/2$ radians.
– Angles rectes, quan mesuren exactament 90 graus o $\pi/2$ radians.
– *Angles obtusos*, quan mesuren més de 90 graus o $\pi/2$ radians i no superen els 180 graus o π radians.

Exemples

- A la figura 1.1.6a, l'angle A és agut i mesura $45°$; l'angle B també i mesura $25°$, i l'angle C és obtús i mesura $110°$.
- A la figura 1.1.6b, els angles O i Q són aguts i fan $50°$ i $40°$, respectivament, i l'angle P és recte i fa $90°$.



a) Els tres angles d'un triangle

b) Triangle amb un angle recte

Fig. 1.1.6a i b

Propietat de la suma dels angles d'un triangle

La suma dels tres angles d'un triangle és igual a 180 graus o π radians.

Aquesta propietat es pot argumentar fent servir les propietats anteriors. A partir de la representació d'un triangle, tal com mostra la figura 1.1.6a, es completa el gràfic de la forma següent.

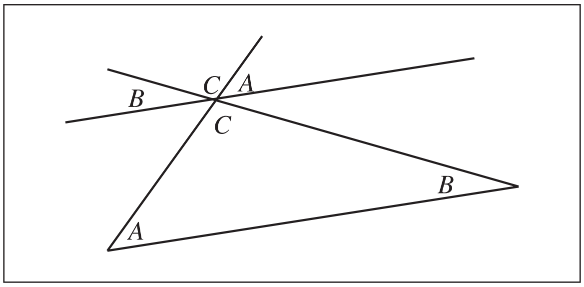


Fig. 1.1.7 Els tres angles d'un triangle sumen π radians

En primer lloc, es traça una recta que passi pel vèrtex de l'angle C i que sigui paral·lela al costat oposat a aquest vèrtex. Tot seguit, es perllonguen els costats del triangle que concorren en el vèrtex de C, tal com mostra la figura 1.1.7.

Les propietats anteriors permeten assegurar que els dos angles C han de coincidir perquè són oposats pel vèrtex, que els dos angles A han de coincidir perquè es corresponen en tallar dues rectes paral·leles per una altra recta. I també, pel mateix motiu, coincideixen els angles B. D'altra banda, aquests tres nous angles són consecutius i s'observa que la seva suma és un angle de π radians o bé 180 graus.

Amb aquesta propietat, resulta que el tercer angle d'un triangle està determinat per la mesura dels dos primers.

Exemple

Suposant que la mesura de l'angle A de la figura 1.1.6a sigui de 45 graus i que la de l'angle B sigui de 25 graus, es dedueix que l'angle C ha de mesurar 110 graus. En efecte:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 180 \\ 45 + 25 + C &= 180 \\ C = 180 - 45 - 25 &= 100 \end{aligned}$$

Els triangles reben noms diferents segons els seus angles:

– un triangle amb un angle recte és un *triangle rectangle*,
– un triangle amb tots els angles aguts és un *triangle acutangle* i
– un triangle amb un angle obtús és un *triangle obtusangle*.

2 Funcions d'una variable

En aquest capítol, es tracten les funcions d'una variable pel que fa a temes de continuïtat i derivació, i les seves conseqüències. El capítol s'inicia presentant les funcions elementals, les més utilitzades; excepte les funcions trigonomètriques, que s'han vist al capítol anterior. Els dos apartats següents formen un conjunt, on es tracten temes relacionats amb la continuïtat i els límits; temes importants de per sí i també per a l'estudi de la derivació. Els altres dos apartats es dediquen a la derivació i les seves aplicacions a l'estudi de funcions, que són molt importants.

L'estudi de funcions d'una variable es completa amb el capítol següent, dedicat a l'aproximació de funcions. Per altra banda, molts dels temes d'aquest capítol són essencials per a l'últim capítol, on s'estudien les funcions de més d'una variable, ampliant els conceptes que s'estudien en aquest capítol.

2.1 Funcions elementals

En aquest apartat, es fa un repàs aprofundit d'algunes de les funcions reals de variable real més elementals, com són les funcions exponencials, les funcions logaritme, les funcions polinòmiques i la funció valor absolut. Són també funcions elementals les funcions trigonomètriques que s'han vist al capítol anterior. Les funcions elementals són molt importants, ja que la majoria de funcions utilitzades s'expressen a partir de les elementals.

En aquest apartat, es presenten les propietats bàsiques d'aquestes funcions. En els apartats següents, se n'estudiaran altres propietats, com la continuïtat, la derivabilitat i temes relacionats. A més, algunes de les propietats descrites en aquest apartat per a les funcions elementals, com la monotonia, s'estudiaran detalladament i en general a la resta d'apartats d'aquest capítol.

Els objectius específics d'aquest apartat són:

– Conèixer les funcions exponencials, logarítmiques, polinomials i la funció valor absolut.
– Conèixer el domini i el recorregut d'aquestes funcions.
– Conèixer les gràfiques d'aquestes funcions.
– Conèixer els punts significatius d'aquestes gràfiques.
– Saber quan aquestes funcions són creixents i quan són decreixents aquestes funcions.
– Conèixer les propietats algebraiques d'aquestes funcions.
– Manipular algunes expressions relacionades amb aquestes funcions.
– Completar quadrats.
– Factorizar polinomis de grau dos.

2.1.1 La funció exponencial

Donat un número real $a > 0$, s'anomena *funció exponencial de base a* la funció f definida per a tot valor real de x mitjançant

$$f : x \to a^x$$

és a dir, la imatge $f(x)$ és la potència de base $a > 0$ i exponent x

En aquest text, tan sols es considera el cas de base positiva ($a > 0$), que és el que interessa. En canvi, l'exponent (x) pot ser tant positiu com negatiu.

La definició de la potència a^x, essent x un nombre real, es construeix per extensió del cas en què l'exponent és enter. Inicialment, es defineix a^n amb n natural, que és un producte n cops de a per si mateix, és a dir, $a^n = a \cdot a \overset{n}{\cdots} a$. En segon lloc, es defineix a^{-n} amb exponent negatiu (enter), que és l'invers de a^n, és a dir, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. En tercer lloc, $a^{\frac{1}{n}}$, que és una arrel enèsima, és a dir, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Després es defineix a^r per a $r = \dfrac{p}{q}$ racional, que és l'arrel q-èsima de la potència p, és a dir, $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. I, finalment, per pas al límit, s'obté a^x per x irracional. Aquest últim pas utilitza el fet que qualsevol nombre real x és el límit d'una successió de nombres racionals r_n, i es defineix el valor de a^x com el del límit de la successió a^{r_n}.

Exemple

- Per tal de definir $5^{\sqrt{2}}$, es considera la successió de nombres racionals $\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots\}$ de les aproximacions successives de $\sqrt{2}$, que tendeix a $\sqrt{2}$. I, per tant, es defineix el número $5^{\sqrt{2}}$ com el límit de la successió

$$5^1 = 5, 5^{1.4} = \sqrt[10]{5^{14}}, 5^{1.41}, 5^{1.414}, 5^{1.4142}, \ldots \to 5^{\sqrt{2}}$$

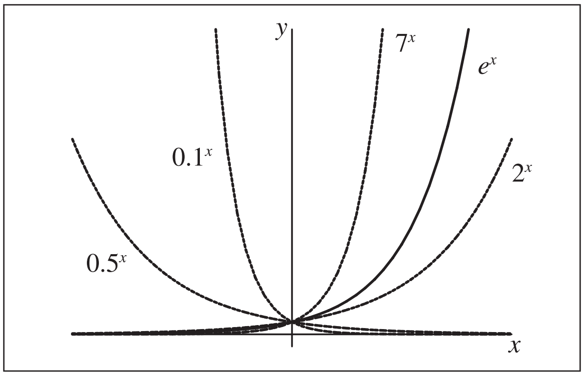


Fig. 2.1.1 Gràfiques de diferents funcions exponencials

Algunes de les propietats més importants de les potències són les següents, on x i y són nombres reals qualssevol i $a, b > 0$

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad a^0 = 1, \qquad 1^x = 1$$

Les gràfiques de les funcions exponencials a^x apareixen a la figura 2.1.1, on es veu que el valor de la base a és clau per al pendent o ritme de variació de les funcions.

Una de les exponencials més freqüents és la que té per base el número de Neper, $e = 2.718281828\ldots$ Aquesta funció a vegades s'escriu amb el símbol exp, és a dir:

$$\exp(x) = e^x$$

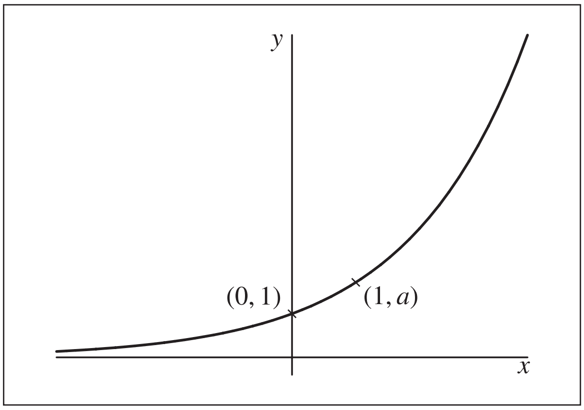


Fig. 2.1.2 Gràfica de a^x per $a > 1$

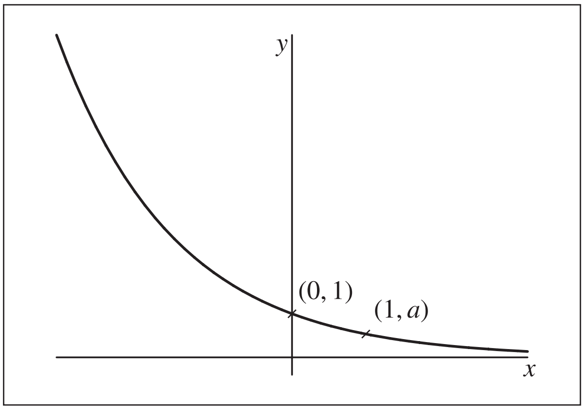


Fig. 2.1.3 Gràfica de a^x per $0 < a < 1$

Propietats

A les figures 2.1.2 i 2.1.3, s'il·lustren algunes de les propietats següents.

- La funció $f(x) = a^x$ està definida per a tot $x \in \mathbb{R}$. El seu domini és $\mathbb{R}$.
- El recorregut és $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, o, el que és equivalent, les imatges mai no són negatives ni nul·les. A més, tot valor $y > 0$ és imatge per algun $x \in \mathbb{R}$.
- Els punts $(0, 1)$ i $(1, a)$ pertanyen a la gràfica de a^x, per a tot valor de a.
- *Monotonia*
  - La funció a^x és estrictament creixent quan $a > 1$. És a dir, si $x < y \Rightarrow a^x < a^y$
  - Per contra, és estrictament decreixent quan $0 < a < 1$. És a dir, si $x < y \Rightarrow a^x > a^y$

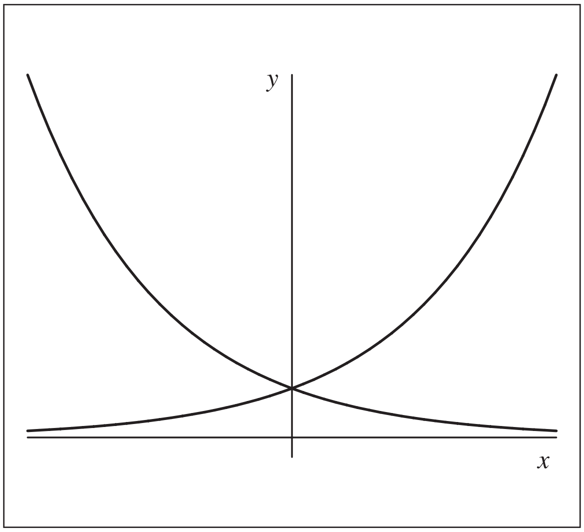


Fig. 2.1.4 Simetria respecte de l'eix OY de a^x i $\frac{1}{a^x}$

- Les funcions exponencials transformen sumes en productes, és a dir:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2} = f(x_1)f(x_2).$$

- Les gràfiques de $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ són simètriques respecte de l'eix OY (Fig. 2.1.4).

  En efecte, $f(x) = a^x = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = g(-x)$.

- Les funcions $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ satisfan que $f(x)g(x) = 1$, per a tot valor de x.

  En efecte, $f(x)g(x) = a^x\left(\frac{1}{a}\right)^x = \left(a\frac{1}{a}\right)^x = 1^x = 1$.

2.1.2 La funció logaritme

L'operació inversa de la potenciació (que s'ha vist a l'apartat anterior) és el càlcul de logaritmes.

> Donats els nombres $a > 0$, u, v, es diu que u és el *logaritme en base a* de v,
> $$u = \log_a v \quad \text{si} \quad v = a^u$$

És a dir, u és el logaritme de v si aquest és la potència de u (en base a).

Exemples

- $2^4 = 16$; per tant, $4 = \log_2 16$, i es diu que 4 és el logaritme en base 2 de 16
- Càlcul de $\log_2 32$
  $$\log_2 32 = u \Leftrightarrow 2^u = 32 \Leftrightarrow u = 5,$$
  amb la qual cosa resulta que $\log_2 32 = 5$
- $\log_{10} 0.001 = -3$ ja que $\log_{10} 0.001 = u \Leftrightarrow 10^u = 0.001 \Leftrightarrow u = -3$
- $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = u \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^u = 0.25 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow u = 2$; per tant, $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = 2$

El cas $a = 1$ no té cap sentit. Com que la funció exponencial de base $a = 1$ és constant, d'una banda, per exemple, $1 = 1^7$ hauria de comportar que $7 = \log_1 1$, però també $1 = 1^{127}$ i, conseqüentment, també hauria de ser $127 = \log_1 1$. Per tant, la definició de la funció logaritme tan sols es té en compte quan la base a és positiva i diferent de 1.

Si $u > 0$, per a $a > 0$ i $a \neq 1$, el logaritme de u en base a ($v = \log_a u$) sempre existeix. Finalment, s'observa que el zero i els nombres negatius no tenen logaritme de cap base, ja que els resultats a^v són sempre més grans que zero.

Propietats

- El logaritme d'un producte és igual a la suma dels logaritmes dels factors:
  $$\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v.$$
- El logaritme d'un quocient coincideix amb la resta del logaritme del dividend menys el logaritme del divisor:
  $$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v.$$
- El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base:
  $$\log_a (u^k) = k \log_a u.$$

- El logaritme d'una arrel és igual al logaritme del radicand, dividit per l'índex de l'arrel:

$$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n}\log_a u.$$

- Els logaritmes d'un mateix número u en dues bases diferents a i b es relacionen de manera que

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}.$$

Per a un nombre real $a > 0$ i $a \neq 1$, s'anomena *funció logaritme en base* a la funció f definida per a tot valor real de $x > 0$ mitjançant

$$f : x \to \log_a x$$

és a dir, la imatge $f(x)$ és el logaritme en base a de x.

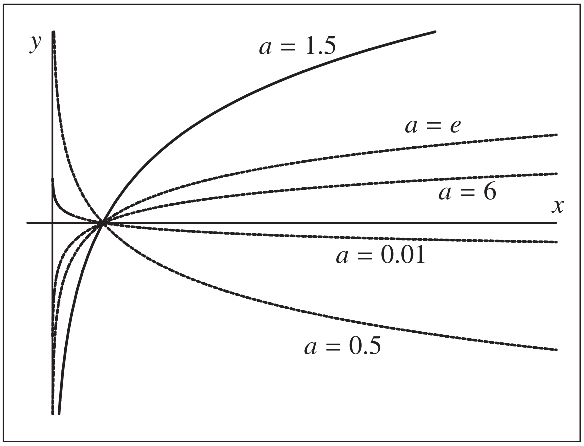


Fig. 2.1.5 Gràfiques de diferents funcions logarítmiques

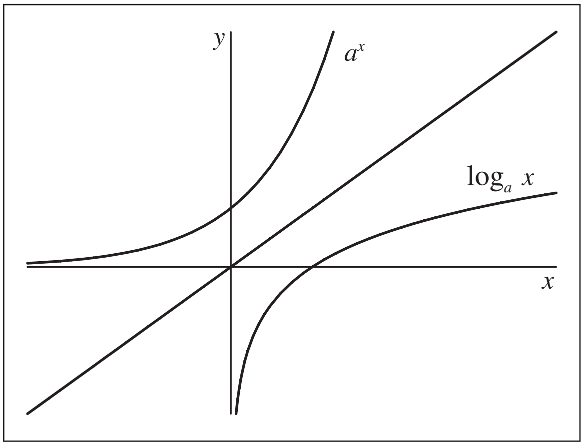


Fig. 2.1.6 Les funcions logarítmiques són recíproques de les funcions exponencials

Les gràfiques dels logaritmes apareixen a la figura 2.1.5, on s'observa que el valor de la base a és clau per al pendent o ritme de variació de les funcions.

Una de les funcions logarítmiques més freqüents és el logaritme neperià, que té per base el número de Neper, $e = 2.71828\ldots$ A vegades, s'escriu amb el símbol $\ln$, és a dir, $\ln(x) = \log_e(x)$. A més, quan s'escriu $\log(x)$, sense especificar la base, acostuma a ser el logaritme de base 10.

Com que la funció logaritme en base a és la funció inversa o recíproca de l'exponencial, la seva gràfica és la corba simètrica respecte de la bisectriu dels quadrants primer i tercer de la gràfica de l'exponencial (Fig. 2.1.6).

Les gràfiques de les funcions logarítmiques de base a i base $\frac{1}{a}$ són simètriques entre elles respecte de l'eix OX, ja que:

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{\log_a 1 - \log_a a} = \frac{\log_a x}{0-1} = -\log_a x$$

3 Aproximació de funcions

En aquest capítol, es tracta l'aproximació de funcions d'una variable de forma global. A l'apartat 2.4.7, s'ha vist una aproximació de funcions de forma local, és a dir, entorn d'un punt donat. En canvi, en aquest capítol s'estudia l'aproximació de forma global, és a dir, en un interval que conté diversos punts donats.

Atesa la complexitat de la teoria corresponent, i per tal de facilitar-ne la comprensió, en aquest capítol s'exposen els diferents conceptes a partir d'exemples més que no pas a partir de fórmules i plantejaments generals. D'altra banda, els càlculs necessaris són llargs i, per tant, es planteja fer els càlculs amb ajut de programes d'ordinador, com el Maple o altres que permetin càlculs matemàtics.

Per al seguiment d'aquest capítol, són especialment necessaris els continguts dels apartats 1.2 i 2.1.

Els objectius específics d'aquest capítol són:

– Saber què vol dir interpolar funcions.
– Conèixer la tècnica d'interpolació polinòmica per a l'aproximació de funcions.
– Conèixer les limitacions d'aquest mètode.
– Valorar l'error d'interpolació.
– Saber què és la interpolació a trossos.
– Conèixer la tècnica de l'ajust mínim quadràtic i utilitzar-la en cas de dades amb error.

3.1 Interpolació polinòmica

En moltes situacions pràctiques, es disposa d'alguns valors d'una funció i, a partir d'ells, es volen estimar valors intermedis d'aquesta funció. Per exemple, un cable determinat cable ha registrat l'elongació, y, per a tres valors d'esforç, x, que són 10, 50 i 80, i se n'ha obtingut $y(10) = 17$, $y(50) = 122$, $y(80) = 293$. Això equival a donar els tres punts del pla $(10,17)$, $(50,122)$, $(80,293)$. El problema que es planteja és estimar, a partir dels valors observats, les elongacions per a esforços intermedis, per exemple, per a $x = 25$ i $x = 65$. En general:

El problema d'interpolació

D'una funció $y = f(x)$, se'n coneix només un conjunt de $m+1$ valors, $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_m, f(x_m))$, i es vol calcular $f(x)$ per a un valor de x diferent dels valors $x_0, \ldots, x_m$.

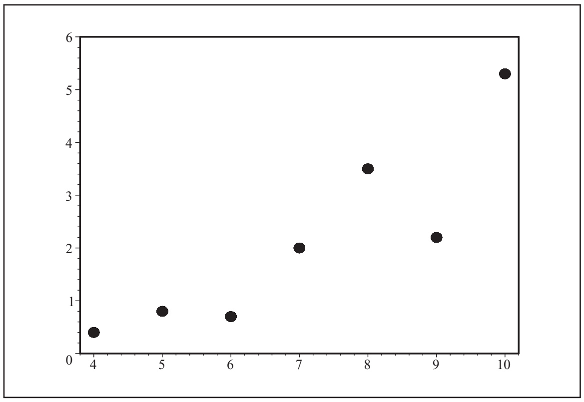


Fig. 3.1.1 Diagrama de punts al pla

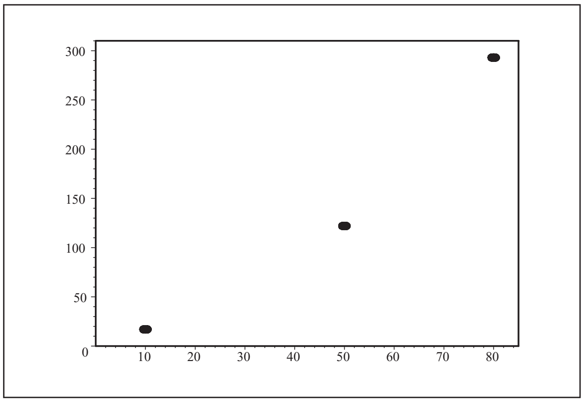


Fig. 3.1.2 Diagrama de punts de l'exemple 3.1.1

Fent servir la notació $y_i = f(x_i)$, els valors observats també s'escriuran $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$.

Gràficament, el conjunt de valors $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ es representa mitjançant un diagrama de punts en el pla, com el de la figura 3.1.1.

Exemple 3.1.1

Per les dades d'esforç i elongació, $(10, 17)$, $(50, 122)$, $(80, 293)$, es té el diagrama de la figura 3.1.2.

El càlcul de $f(x)$ es realitza fent servir una funció polinòmica g que aproximi f, construïda a partir de la informació que proporciona el conjunt de valors $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_m, f(x_m))$.

El valor obtingut per a $f(x)$ mitjançant la funció g és una aproximació millor o pitjor del valor real de $f(x)$, depenent de les condicions de càlcul.

Per al càlcul de la funció d'aproximació, es consideren dos procediments i es fan servir l'un o l'altre depenent del grau d'error de les dades.

> Si les dades es poden considerar precises, es fa servir l'única funció polinòmica, $g(x)$, de grau m, que compleix $g(x_i) = y_i$ per a totes les dades observades $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$. En aquest cas, $g(x)$ s'anomena *polinomi d'interpolació* i l'aproximació de $y = f(x)$ per $g(x)$ es diu que és el *valor d'interpolació*.

Aquest mètode s'estudia als apartats següents.

Quan a les dades hi ha error, no es considera necessari que la funció polinòmica d'aproximació g compleixi $g(x_i) = y_i$ per a cada un dels $m + 1$ parells de valors $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$. En aquest cas, cada observació considerada individualment pot ser incorrecta a causa d'aquest error, i llavors s'opta per prendre com a funció d'aproximació una funció que representi la tendència de les dades considerades conjuntament. Per fer-ho, s'utilitza el *mètode dels mínims quadrats*, que s'estudia a l'apartat 3.2.

3.1.1 Interpolació lineal

La *interpolació lineal* és el cas més simple d'aproximació per interpolació i consisteix a prendre com a funció d'aproximació un polinomi de primer grau.

Si es tenen dos punts (x_0, y_0), (x_1, y_1) el polinomi d'interpolació per a valors de x entre x_0 i x_1 és el polinomi de primer grau $y = g(x) = ax + b$, que correspon a l'equació de la recta que uneix els punts (x_0, y_0) i (x_1, y_1).

Per calcular-lo, és suficient resoldre el sistema d'equacions, d'incògnites a i b, que s'obté en imposar que $y = ax + b$ passi per (x_0, y_0) i (x_1, y_1). Això és:

$$\begin{cases} y_0 = g(x_0) = ax_0 + b \\ y_1 = g(x_1) = ax_1 + b \end{cases}$$

Exemple 3.1.2

Es vol estimar el valor de $\sin \frac{3\pi}{8}$ a partir de saber que $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (Fig. 3.1.3).

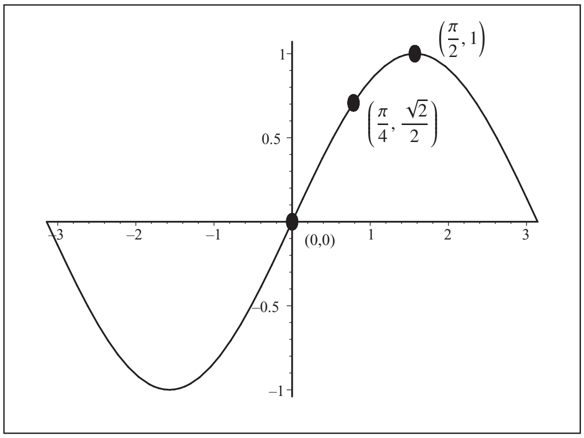


Fig. 3.1.3 Funció sinus

Una primera possibilitat és considerar els punts $(0, 0)$ i $(\pi/2, 1)$, i prendre com a funció d'aproximació la que correspon a la recta que passa per ells. L'equació de la recta correspon a una funció polinòmica de primer grau $g(x) = ax+b$, que compleix el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

Això és
$$\begin{cases} a0 + b = 0 \\ a(\pi/2) + b = 1 \end{cases}$$

D'aquí resulta $a = 2/\pi$, $b = 0$, i la funció d'aproximació és $g(x) = \frac{2}{\pi}x$ (Fig. 3.1.4).

Llavors, el sinus de $\frac{3\pi}{8}$ s'aproxima per $g\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ (Fig. 3.1.5) i el valor d'interpolació és

$$\sin \frac{3\pi}{8} \cong g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2(3\pi/8)}{\pi} = 0.75$$

S'observa, en aquest cas, que l'error comès en interpolar a partir dels punts $(0, 0)$ i $(\pi/2, 1)$ és de l'ordre de 0.17.

$$\left|\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) - g\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right| = 0.17388$$

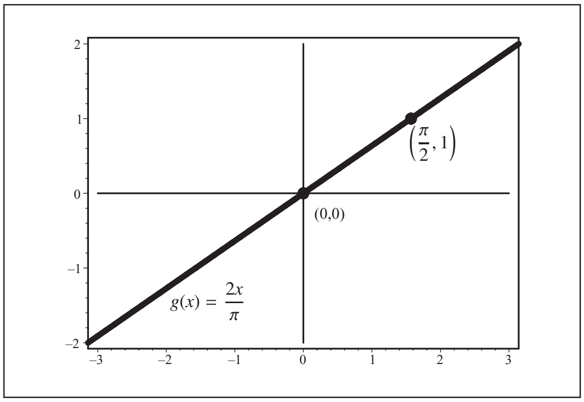


Fig. 3.1.4 Recta d'interpolació

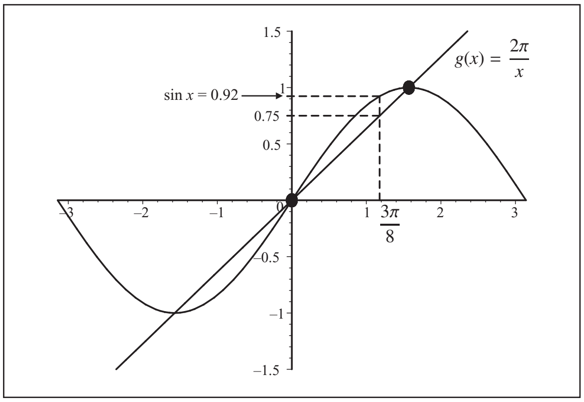


Fig. 3.1.5 Aproximació per interpolació lineal

Exemple 3.1.3

A continuació, es repeteix l'operació d'interpolació però prenent els punts $\left(\pi/4,\ \sqrt{2}/2\right)$ i $(\pi/2, 1)$. S'observa que aquests punts són més pròxims entre si que els punts $(0, 0)$ i $(\pi/2, 1)$ utilitzats abans.

La recta que uneix aquests dos punts té per equació:

$$y = 0.3729232288x + 0.414213562$$

La funció d'interpolació és llavors:

$$g_2(x) = 0.3729232288x + 0.414213562$$

i el valor d'interpolació per a $\sin \frac{3\pi}{8}$ és:

$$\sin \frac{3\pi}{8} \cong g_2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0.3729232288\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 0.414213562 = 0.85355$$

A la figura 3.1.6 es mostra gràficament la interpolació.

L'error d'interpolació és, en aquest cas, de l'ordre de 0.07.

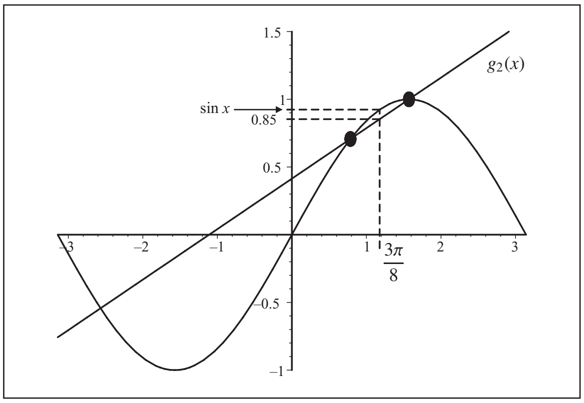


Fig. 3.1.6 Interpolació lineal de $y = \sin x$

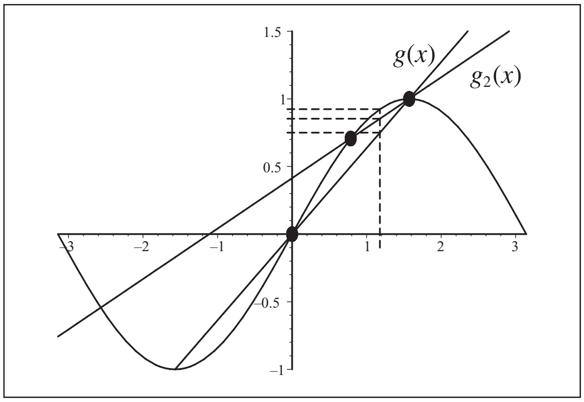


Fig. 3.1.7 Dues interpolacions lineals de $y = \sin x$

4 Funcions de diverses variables

En aquest capítol, s'estudien les funcions de diverses variables pel que fa als temes relacionats amb derivació. A més dels conceptes bàsics, com el domini i la representació gràfica, es tracten les derivades parcials, l'aproximació lineal, el gradient i una mica els extrems relatius.

Tots els conceptes s'introdueixen com a extensió dels corresponents conceptes de funcions d'una variable, estudiats al capítol 2. Es tracten sobretot les funcions de dues variables, per facilitar la comprensió i perquè es pot estendre la teoria fàcilment als casos de més variables. Per al seguiment d'aquest capítol, és important el contingut dels capítols 1 i 2.

Les figures d'aquest capítol que representen objectes de l'espai tridimensional es poden veure des de diferents punts de vista a l'arxiu Maple <figures_dim3_capitol_4.mws> de l'annex.

4.1 Conceptes generals

En aquest apartat, s'introdueixen els conceptes bàsics de funcions de diverses variables i la seva representació gràfica. Aquest apartat és essencial per al seguiment dels següents.

Els objectius específics d'aquest apartat són:

– Saber què és una funció de diverses variables.
– Valorar una funció segons el valor de les variables.
– Saber què és el domini d'una funció.
– Reconèixer si un punt és o no del domini d'una funció.
– Reconèixer i determinar el domini d'una funció.
– Saber què és una corba de nivell.
– Reconèixer, llegir i construir el mapa de corbes de nivell d'una funció.
– Interpretar la representació en superfície d'una funció de dues variables.
– Determinar on és contínua una funció.

4.1.1 Concepte de funció de diverses variables

Als capítols anteriors s'han estudiat les funcions d'una variable, és a dir, variables que depenen d'una sola variable; del tipus $y = f(x)$, on y només depèn de x. En aquest capítol, s'estudien funcions que depenen de dues (o més) variables, anomenades *funcions de diverses variables*, que s'expressen de la forma $z = f(x, y)$.

$z = f(x, y)$ Funció que depèn de dues variables

És a dir, a la funció f, la variable z (la variable dependent) depèn de les variables x, y (variables independents).

També es pot indicar dient que a cada parell de valors x, y la función f li assigna el valor z:

$$f : (x, y) \to z$$

Exemples

- Volum de cilindre $V(r, h) = \pi r^2 h$

  La variable V (volum d'un cilindre) depèn de les variables r (radi de la base) i h (alçada)
- $T = f(x, y)$

  La temperatura (T) varia en una superfície plana en funció de la posició, donada per les coordenades x, y
- $z = x^3 y$
- $z = \sin(x^2 + y^2) - 2x$

Habitualment, totes les variables prenen valors en els nombres reals, és a dir, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Càlcul d'imatges

En una funció $z = f(x, y)$, a cada parell de valors concrets a, b de les variables x, y li correspon un valor de la variable z. Aquest valor $z = f(a, b)$ s'anomena la *imatge* de (a, b).

Exemples

- A la funció $z = x^3 y$, la imatge de $(3, 2)$, que s'escriu $z(3, 2)$, es calcula substituint els valors de x per 3 i de y per 2, i s'obté 54. Per tant, $z(3, 2) = 3^3 \cdot 2 = 54$, és a dir, 54 és la imatge de $(3, 2)$.
- A l'exemple de $V(r, h) = \pi r^2 h$, a radi 2 i alçada 5 els correspon el volum:

$$V(2, 5) = \pi\, 2^2 \cdot 5 = 20\pi \approx 62{,}83$$

Funcions de més variables

En aquest capítol, es tracten sobretot funcions de dues variables. Però les funcions de més de dues variables tenen un funcionament similar i, per tant, la majoria de conceptes i propietats es poden estendre fàcilment de dues variables a més.

Exemples

- Volum de prisma rectangular $V(x, y, z) = xyz$, funció que depèn de tres variables
- $u(x, y, z, t) = x^3 + \dfrac{1}{t}\sin(y + z)$ funció que depèn de quatre variables

4.1.2 Domini

El concepte de domini d'una funció de diverses variables és anàleg al de domini d'una funció d'una variable. En el cas d'una variable el domini d'una funció $y = f(x)$ és el conjunt de nombres x que tenen definida la imatge $f(x)$.

Anàlogament:

El *domini* d'una funció $z = f(x, y)$ és el conjunt de parells de nombres (x, y) que tenen definida la imatge $f(x, y)$, és a dir:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \mid \text{ existeix } f(x, y)\}$$

Si la funció $f(x, y)$ està definida per tot parell de valors de x, y, el domini és tot el conjunt $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, que gràficament es representa pel pla xy. Si la funció no està definida per alguns parells x, y, el domini és una part o un subconjunt de $\mathbb{R}^2$.

Exemples

- Funció $z = \sqrt{x - y}$

  Perquè existeixi $z(x, y)$, cal que $x - y \geq 0$. Per tant,

$$\text{Dom}\,(z) = \{(x, y) \mid x \geq y\}$$

  que és el semiplà a la dreta de la recta $y = x$ (Fig. 4.1.1)

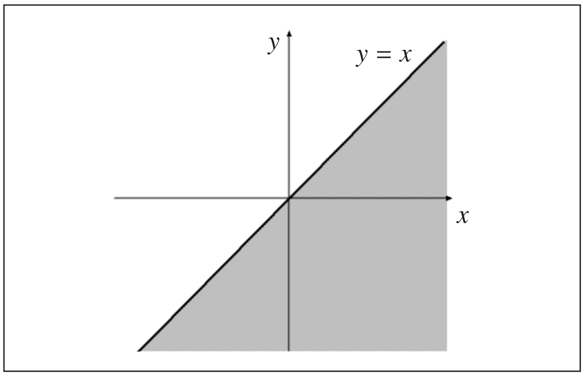


Fig. 4.1.1 Domini de la funció $z = \sqrt{x - y}$

- La funció $f(x, y) = x^2y + 3y^3$ està definida per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, ja que les sumes i els productes es poden calcular per a tots els nombres reals. Per tant:

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$$

- Funció $z = \ln(x^2 + y^2)$

  Perquè existeixi $z(x, y)$, cal que $x^2 + y^2 > 0$, ja que el logaritme només existeix per a arguments positius. $x^2 + y^2 > 0$ és cert per a tot x, y, excepte per a $x = y = 0$. Per tant,

$$\text{Dom}\,(z) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

  és a dir, tot el pla xy excepte l'origen de coordenades.

Restricció del domini

A vegades, no interessa estudiar una funció en tot el seu domini, sinó en una part. Aleshores, es pot restringir el domini al conjunt d'interès. És a dir, es consideren només els punts d'interès que tenen imatge.

Exemple

Pot interessar estudiar la funció $z = \ln(x^2 + y^2)$ només als punts (x, y) del cercle de centre $(0, 0)$ i radi 2, és a dir, a $C = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$. Aleshores, el domini restringit on s'estudia la funció està format pels punts d'aquest cercle que tenen imatge, que són tots excepte $(0, 0)$. Per tant:

$$\text{domini d'estudi} = C - \{(0, 0)\} = \left\{(x, y) \mid 0 \neq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

que és el cercle excepte l'origen (Fig. 4.1.2).

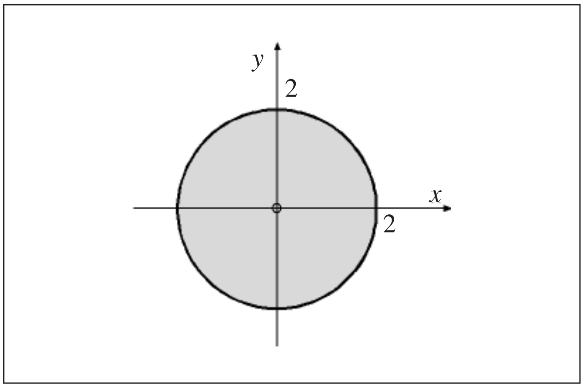


Fig. 4.1.2 Domini d'estudi de l'exemple

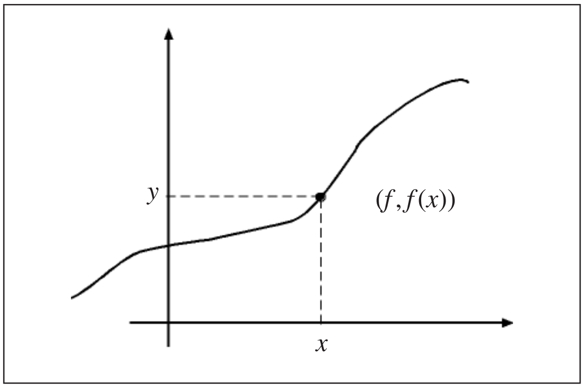


Fig. 4.1.3 Representació gràfica d'una funció d'una variable

4.1.3 Representació gràfica. Corbes de nivell

Una funció de dues variables es pot representar gràficament de dues formes: com a superfície o amb corbes de nivell. La representació gràfica de funcions de més de dues variables és complicada i no s'estudia en aquest llibre.

Representació gràfica com a superfície

Les funcions d'una variable $y = f(x)$ es representen gràficament com una corba del pla xy, de manera que es representa cada valor de x a l'eix de les abscisses i la seva imatge $f(x)$ a les ordenades, i així s'obtenen els punts $(x, f(x))$ de la corba (Fig. 4.1.3).

El procés anàleg en una funció $z = f(x, y)$ de dues variables requereix tres eixos x, y, z i, per tant, es fa a l'espai. Així, es representa cada parell de valors (x, y) en el pla x, y de l'espai i la seva imatge $z = f(x, y)$ a l'eix z, i s'obtenen els punts $(x, y, f(x, y))$. Aquests punts formen una *superfície* a l'espai $\mathbb{R}^3$, ja que a sobre (o sota) de cada punt (x, y) hi ha un punt d'alçada z variable (Fig. 4.1.4).

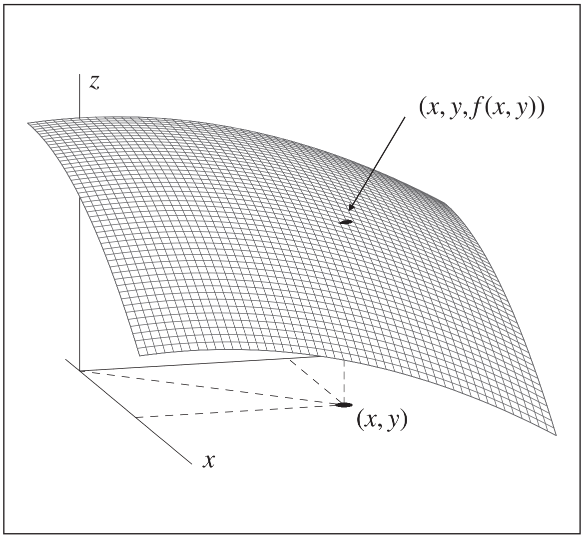


Fig. 4.1.4 Representació gràfica d'una funció de dues variables

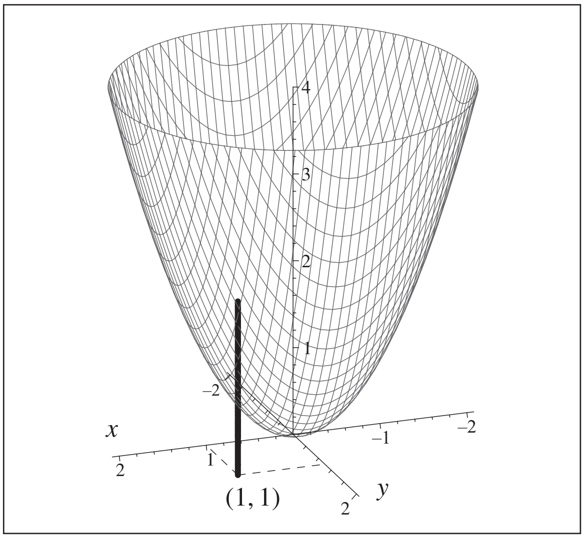


Fig. 4.1.5 Representació gràfica de $z = x^2 + y^2$

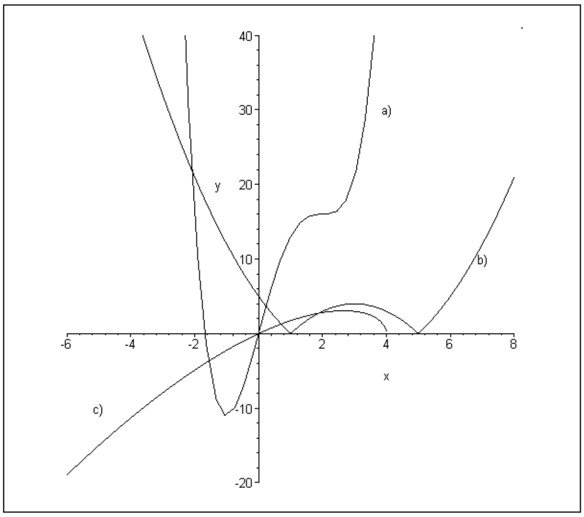


Fig. 8 Gràfiques del problema 5, apartats a, b i c

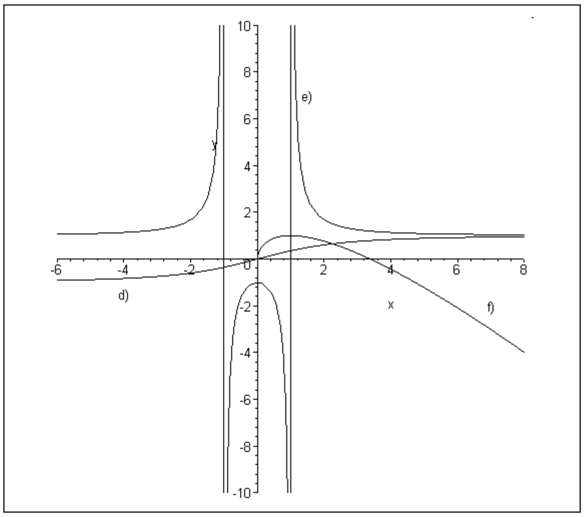


Fig. 9 Gràfiques del problema 5, apartats d, e i f

Respostes correctes als problemes proposats a 3.1

Encara que no es demanin als enunciats, a les solucions s'inclouen les representacions gràfiques, a efectes il·lustratius.

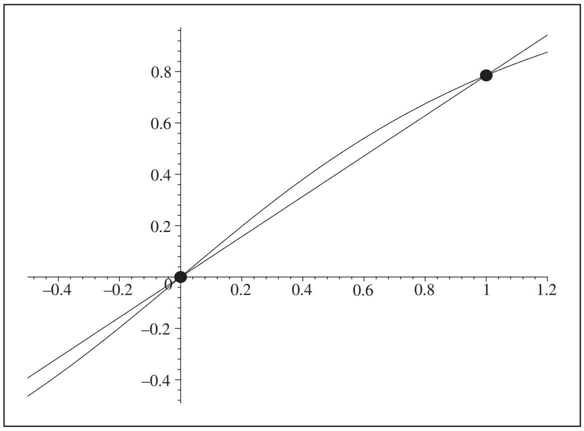


Fig. 10 Funcions del problema 1

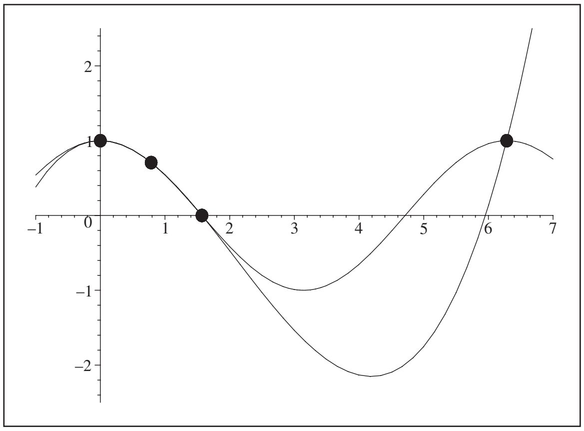


Fig. 11 Funcions del problema 2

Problema 1: $p(x) = \dfrac{\pi}{4}x$. Gràfica a la figura 10.

Problema 2: $p(0.5) = 0.392699$, error $=0.0709486$

Problema 3: El polinomi d'interpolació és:

$$0.08564241690x^3 - 0.5375390578x^2 - 0.0035695886x + 1$$

La figura 11 conté la seva representació gràfica conjuntament amb la del cosinus. El gràfic de les magnituds d'error és a la figura 12.