

POLITEXT

Pere Pascual Gainza, ed.

Càlcul integral per a enginyers

EDICIONS UPC

Càlcul integral per a enginyers

POLITEXT

Pere Pascual, ed. - Carles Bonet
Albert Compta - Neus Cónsul
Mercè Ollé - Agustí Roig

Càlcul integral per a enginyers

EDICIONS UPC

Índex

Introducció	5
1 La noció d'integral de Riemann	7
1.1 La integral definida d'una variable	7
1.2 Definició d'integral en un rectangle	8
1.3 Criteris d'integrabilitat	14
1.4 Integració en dominis més generals	18
1.5 Propietats de la integral	19
1.6 Integrals sobre regions de tres o més variables	21
2 Càlcul d'integrals	23
2.1 El Principi de Cavalieri	23
2.2 El teorema de Fubini	26
2.3 Exemples	30
2.4 Integrals en tres o més variables	36
2.5 Canvi de variables per a integrals dobles	38
2.6 Canvi de variables per a integrals de tres o més variables	44
2.7 Integrals múltiples impròpies	50
2.8 Integració aproximada	58
3 Algunes aplicacions de les integrals múltiples	65
3.1 Càlcul d'àrees i volums	65
3.2 Mitjana d'una funció	68
3.3 Massa d'un cos	70
3.4 Centre de masses	72
3.5 Moment d'inèrcia i energia cinètica	76
3.6 Potencial gravitacional	82
4 Integració de funcions sobre corbes i superfícies	87
4.1 Longitud d'una trajectòria	87
4.2 Integral de trajectòria	96
4.3 El concepte de superfície	98

Introducció

Els plans d'estudis de les enginyeries i les llicenciatures científiques acostumen a contenir un capítol dedicat al Càlcul Integral en el qual s'aprofundeix, amb més o menys intensitat, en els conceptes i resultats d'aquesta branca de les matemàtiques. El llibre que teniu a les mans està basat en un curs de Càlcul Integral, corresponent a una assignatura de tercer quadrimestre, que els autors hem estat desenvolupant durant els darrers 12 anys a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona i és fruit de l'experiència adquirida en aquest llarg període.

El curs parteix de què l'estudiant coneix el Càlcul Diferencial d'una i diverses variables, així com la teoria d'integració en una variable, i que té coneixements elementals d'Àlgebra Lineal i Geometria. El contingut que proposem es pot dividir en dues parts: el càlcul integral de diverses variables i el càlcul vectorial.

Els tres primers capítols estan dedicats al càlcul integral de diverses variables i a les seves aplicacions. L'objectiu principal d'aquests capítols és fonamentar, des d'un punt de vista alhora intuïtiu i precís, el concepte d'integral i els mètodes de càlcul més importants, la integració iterada i el canvi de variables. Actualment és relativament senzill utilitzar mètodes computacionals per calcular integrals de forma efectiva, és per això que creiem que és important incidir en la definició d'integral, què és i per a què serveix. El capítol 3 recull algunes de les aplicacions més habituals del càlcul integral: el càlcul d'àrees i volums, el càlcul de masses, de centres de masses, i els moments d'inèrcia.

En el capítol 4 s'introdueixen les integrals de funcions sobre corbes i superfícies. Aprofitem aquest capítol per recordar com es tracten matemàticament aquests objectes, cosa que servirà alhora com a introducció de la segona part del curs, el càlcul vectorial.

Els dos darrers capítols estan dedicats a l'estudi integral dels camps vectorials, la seva circulació al llarg d'una trajectòria i el flux a través d'una superfície, i s'estableixen els teoremes integrals del càlcul vectorial: el teorema de Green, el teorema del rotacional o de Stokes i el teorema de la divergència o de Gauss. És indubtable l'interès d'aquesta mena d'estudi en les aplicacions i és per això que hem volgut il·lustrar la seva utilitat incorporant alguns elements de la mecànica de fluids, com l'equació de continuïtat i l'equació del moviment d'Euler, o de l'electromagnetisme, com les equacions de Maxwell.

Aquest és un llibre col·lectiu més enllà dels autors que signem el text, ja que ens sentim hereus

de l'experiència d'altres professors i companys que, al llarg dels darrers anys, han impartit l'assignatura i, també, de la interacció docent amb els molts estudiants que han passat per les nostres aules. Volem expressar aquí, a tots ells, el nostre agraïment. En especial, volem esmentar el nostre deute als professors F. Puerta, F. Guillén, A. Jorba i V. Navarro.

Per la composició del text i dels gràfics hem comptat amb la inestimable ajuda de Rosa Maria Cuevas. El professor J. L. Ruíz ens ha permès utilitzar el format de llibre dissenyat per ell. El lector apreciarà aquestes aportacions, que milloren la presentació del text.

Hem intentat presentar un curs equilibrat entre els aspectes teòrics i l'orientació pràctica que un text destinat als futurs enginyers ha de mantenir. P. Puig Adam, en el seu famós llibre *Curso teórico práctico de Cálculo Integral aplicado a la física y técnica*, publicat per primer cop l'any 1944, ja feia referència a la necessitat d'establir aquest equilibri. Acabarem amb les paraules amb què l'admirat Puig Adam clou el seu pròleg: “[...] *entrego este libro al lector, deseándole feliz excursión por él ... y recuerdo grato*”.

Barcelona, març 2002

La noció d'integral de Riemann

Donada una funció d'una variable $f(x)$ la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

està connectada, com s'ha vist en el curs de Càlcul Infinitesimal, amb el càlcul de l'àrea limitada per la funció i l'eix real, i admet algunes interpretacions físiques que la fan especialment útil. Per exemple, la podem interpretar com la distància recorreguda per un mòbil amb velocitat donada per $f(x)$ des de l'instant a fins a l'instant b .

Hi ha molts altres problemes similars, tan geomètrics com físics, que fan intervenir funcions de diverses variables. L'objectiu d'aquest primer capítol és introduir la noció d'integral corresponent. Per fer-ho, prendrem com a guia la definició d'integral d'una funció d'una variable, i ens restringirem sobretot al cas d'integrals de dues variables. Aquesta elecció del nombre de variables permet un desenvolupament més gràfic i intuïtiu de les idees que presentem, encara que els resultats seran certs en general.

1.1 La integral definida d'una variable

En aquest apartat, de caràcter introductori, repassarem succintament la definició d'integral d'una variable. Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció definida en un interval compacte de la recta real. Si $f(x)$ és una funció positiva, el gràfic de f determina, amb l'eix d'abscisses, una àrea que volem calcular.

La idea de partida és prou simple, consisteix a aproximar l'àrea que es vol calcular per la suma de les àrees de certs rectangles, com ilustra la figura 1.1. Per fer-ho, es subdivideix el segment $[a, b]$ en n intervals $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, de longitud $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, s'escullen punts $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ i es defineix la suma

$$S(x_i, c_i) = f(c_0)\Delta x_0 + \dots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

que s'anomena *la suma de Riemann associada a la partició*, i que correspon a la suma de les àrees dels rectangles que aproximen l'àrea sota el gràfic de f .

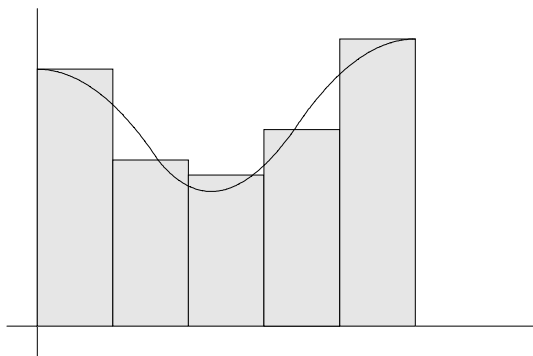


Figura 1.1: Aproximació de l'àrea per les àrees de rectangles

Les sumes de Riemann depenen de les subdivisions realitzades i dels punts intermedis c_i escollits. Per formalitzar la definició d'integral s'ha de fer un pas al límit: es diu que f és integrable en l'interval $[a, b]$ d'integral I si, donat un nombre real qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que per a tota partició de $[a, b]$ amb $\Delta x_i < \delta$, per a tot i , les sumes de Riemann associades satisfan que

$$|I - S(x_i, c_i)| < \varepsilon,$$

independentment dels punts c_i escollits. És a dir, fixat un marge d'error ε hi ha un δ tal que les sumes de Riemann definides amb particions de longitud menor que δ difereixen de I menys que ε .

Usualment s'escriu

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [f(c_1)\Delta x_1 + \dots + f(c_n)\Delta x_n].$$

No totes les funcions són integrables. Si la funció f no està acotada podem fer les sumes de Riemann tan grans com vulguem: en efecte, podem escollir els punts c_i de manera que $f(c_i)$ sigui tan gran com es vulgui i, per tant, la funció no és integrable. És per això que es restringeix l'atenció a les funcions acotades. L'acotació d'una funció, però, no assegura la integrabilitat, com mostra la coneguda funció de Dirichlet definida en l'interval $[0, 1]$ i que pren valors 0 o 1 segons si el punt és racional o no.

1.2 Definició d'integral en un rectangle

Signi $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de \mathbb{R}^2 i $f(x, y)$ una funció *acotada* definida en el rectangle R ,

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Per definir la integral de $f(x, y)$ en R seguirem el model indicat en l'apartat anterior en el cas d'una variable, amb alguna simplificació deguda a l'acotació de f .

Quan $f(x, y)$ sigui una funció positiva determinarà un volum com el de la figura 1.2, que volem determinar. En general, si f no és necessàriament positiva, no podem parlar del volum

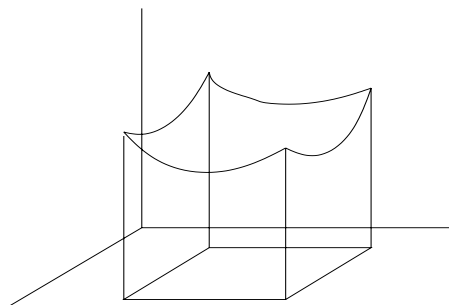


Figura 1.2: Volum sota un gràfic

determinat per f , en aquest cas volem determinar la integral de f en el rectangle R .

Com que f és una funció acotada, podem considerar els seus valors extrems

$$\begin{aligned} M &= \sup f(x, y), & (x, y) \in R, \\ m &= \inf f(x, y), & (x, y) \in R. \end{aligned}$$

És clar que la integral que volem determinar estarà entre els valors $mA(R)$ i $MA(R)$ (on $A(R)$ és l'àrea del rectangle R), és a dir, si I és el valor de la integral (pensem en el volum quan la funció és positiva, vegeu la figura 1.3), és clar que

$$m(b-a)(d-c) \leq I \leq M(b-a)(d-c).$$

Donat un nombre natural $n \in \mathbb{N}$ definim la *partició regular d'ordre n* del rectangle R com la

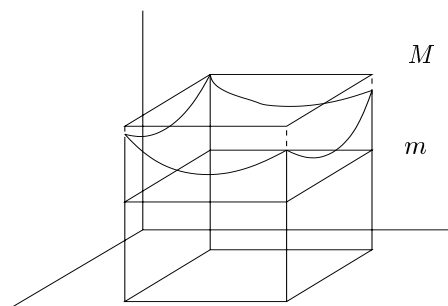


Figura 1.3: Acotació del volum sota un gràfic

partició de R en subrectangles R_{ij} donats per

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

on

$$\begin{aligned}x_i &= a + i \frac{b-a}{n}, & i = 0, 1, \dots, n \\y_i &= c + i \frac{d-c}{n}, & i = 0, 1, \dots, n.\end{aligned}$$

En la figura 1.4 es mostra la partició regular d'ordre 3 d'un rectangle R . La funció f està

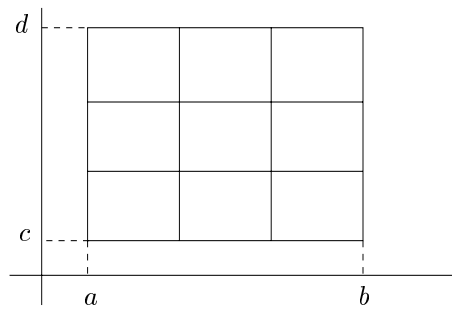


Figura 1.4: Partició regular d'ordre 3 d'un rectangle

acotada sobre cadascun dels rectangles R_{ij} . Siguin

$$\begin{aligned}M_{ij} &= \sup f(x, y), & (x, y) \in R_{ij}, \\m_{ij} &= \inf f(x, y), & (x, y) \in R_{ij}.\end{aligned}$$

1.2.1 Definició *Es defineix la suma superior n -èsima de f en el rectangle R segons*

$$S_n(f, R) = \sum_{i,j} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Anàlogament, es defineix la suma inferior n -èsima per

$$s_n(f, R) = \sum_{i,j} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

En el cas d'una funció positiva, aquestes sumes representen les sumes dels volums de base R_{ij} i alçades M_{ij} i m_{ij} , respectivament.

Observem que, a causa de la regularitat de la partició, les àrees dels rectangles R_{ij} donades pels productes $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ són totes iguals a $(b-a)(d-c)/n^2$ i, per tant, les sumes superiors i inferiors es poden escriure de la forma

$$\begin{aligned}S_n(f, R) &= \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j} M_{ij}, \\s_n(f, R) &= \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j} m_{ij}.\end{aligned}$$

És clar que, per a tot n , se satisfà que

$$s_n(f, R) \leq S_n(f, R),$$

i, més generalment, es pot comprovar que donats dos nombres qualssevol n i m , se satisfà que

$$s_n(f, R) \leq S_m(f, R).$$

1.2.2 Definició *Es diu que la funció f és integrable en el rectangle R si existeixen i són iguals els límits de les successions $s_n(f, R)$ i $S_n(f, R)$. Al valor comú l'anomenarem la integral de f en R .*

És a dir, la integral de f , en cas d'existir, és igual a

$$\int_R f(x, y) dx dy = \lim S_n(f, R) = \lim s_n(f, R).$$

En termes geomètrics, diem que una figura de l'espai ordinari determina un volum si és possible aproximar-la amb un marge d'error prefixat, tant des de dintre com des de fora, per una suma de volums de paral·lelepípedes.

1.2.3 Observació Es pot demostrar que, com en el cas de funcions d'una variable, el valor d'una integral és el límit de les sumes de Riemann: partim el rectangle R en subrectangles R_{ij} , no necessàriament de forma regular, escollim punts $c_{ij} \in R_{ij}$, i definim la suma de Riemann associada per

$$S(R_{ij}, c_{ij}) = \sum f(c_{ij})A(R_{ij}).$$

Aleshores se satisfà que

$$\int_R f(x, y) dx dy = \lim_{A(R_{ij}) \rightarrow 0} S(R_{ij}, c_{ij}).$$

Sovint es parla que $A(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$ és l'element d'àrea i que la integral és la suma dels volums damunt dels elements d'àrea infinitesimals. Quan parlem en aquests termes voldrà dir exactament que es dona la igualtat expressada anteriorment.

1.2.4 Exemples Per il·lustrar la definició d'integral, anem a presentar dos exemples sobre el quadrat $R = [0, 1] \times [0, 1]$, un d'una funció que no és integrable i l'altre del càlcul d'una integral.

1. Considerem la funció definida per

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Com que els nombres racionals són densos en \mathbb{R} , els extrems de la funció sobre la partició n -èsima estan donats per

$$M_{ij} = 1, \quad m_{ij} = 0,$$

Càlcul d'integrals

En el capítol anterior hem establert la noció de funció integrable, però no hem donat mètodes efectius per al càlcul d'integrals. En aquest capítol establirem dos resultats fonamentals per al càlcul d'integrals: el teorema de Fubini i el teorema de canvi de variables, que il·l amb diversos exemples.

El capítol inclou, a més, un apartat dedicat a les integrals impròpies de diverses variables, i acaba introduint algunes nocions elementals d'integració aproximada.

2.1 El Principi de Cavalieri

Dediquem aquest apartat a l'anomenat Principi de Cavalieri, ja que és un principi que motiva geomètricament els resultats que provarem en propers apartats, alhora que ha jugat un important paper històric en el desenvolupament del càlcul integral.

Donat un cos V de \mathbb{R}^3 , que suposarem compacte, és intuïtivament clar què entenem pel volum de V . De fet, en el cas de cossos prou regulars (com ara un paralelepípede, un cilindre, una esfera, ...) disposem de fórmules per calcular-ne els volums. Ara bé, com es pot calcular el volum d'un cos V en general? Anem a fer unes consideracions heurístiques que ens conduiran al Principi de Cavalieri.

El Principi de Cavalieri diu que podem calcular el volum del cos V com la “suma” de les àrees de les seccions obtingudes en llescar V per un feix de plans paral·lels. En particular, afirma que dos cossos amb les mateixes seccions tenen el mateix volum. Més concretament, suposem que considerem el pla secant a V definit per $x = x_0$, $a < x_0 < b$ (on a i b són els valors mínim i màxim, respectivament, de x a V) i notem per $A(x_0)$ l'àrea de la secció $V \cap \{x = x_0\}$ (vegeu la figura 2.1).

S'obté així una funció d'una variable $A(x)$. Si interpretem ara que la “suma” de les àrees $A(x)$ és la integral de $A(x)$ entre a i b , el Principi de Cavalieri es concreta de la forma següent:

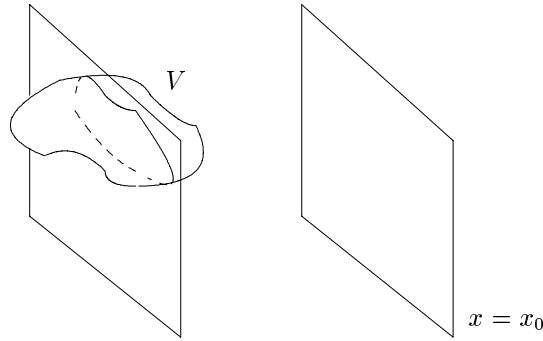


Figura 2.1: Secció d'un cos per un pla $x = x_0$

Principi de Cavalieri: $\text{vol}(V) = \int_a^b A(x) dx$.

Caldrà, però, saber calcular les àrees $A(x)$ per tal que aquest criteri sigui efectiu. Restringim-nos a una situació especial, on això sigui possible. Suposem que V correspon a un cos limitat per una funció positiva de dues variables $f(x, y)$ definida en un rectangle $[a, b] \times [c, d]$, és a dir,

$$V = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

En aquest cas, les àrees $A(x)$ corresponen a les integrals d'una variable

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

i, pel Principi de Cavalieri, s'ha de satisfer la igualtat

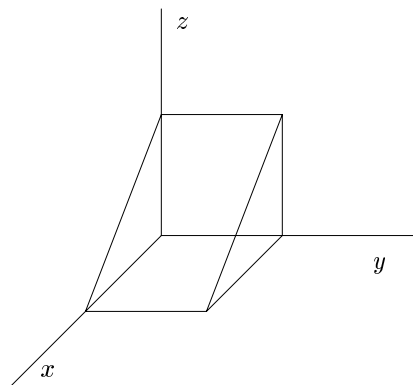
$$\text{vol}(V) = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

És a dir, el Principi de Cavalieri estableix que el volum sota la funció $f(x, y)$ es calcula mitjançant una integral iterada.

La justificació que hem esbossat de la fórmula anterior no és una demostració, no obstant anem a comprovar que aquesta fórmula se satisfà en el cas particular d'un cos regular del qual coneixem el volum a priori. Considerem el volum limitat pel gràfic de la funció (vegeu la figura 2.2)

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 1 - x. \end{aligned}$$

Donat que el cos correspon a la meitat d'un cub de costat 1, el seu volum és $1/2$. Comprovem

Figura 2.2: Gràfic de la funció $f(x, y) = 1 - x$

ara que el Principi de Cavalieri dóna el mateix valor:

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (1-x) dx \right) dy = \int_0^1 \left. x - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

El Principi de Cavalieri és independent del feix de plans paral·lels que haguem utilitzat per llescar el cos V . Així, per exemple, si es prenen plans paral·lels al pla $y = 0$ i es denoten per $A(y)$ les àrees de les seccions corresponents, hauria de satisfer-se que

$$\text{vol}(V) = \int_c^d A(y) dy,$$

és a dir,

$$\int_a^b A(x) dx = \int_c^d A(y) dy.$$

En el cas del volum corresponent al gràfic d'una funció positiva, s'obté la igualtat

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.1)$$

Pot comprovar-se fàcilment que les dues integrals coincideixen en l'exemple anterior.

En definitiva, si acceptem aquest principi podríem inferir que les integrals de dues variables es calculen integrant iteradament aquestes variables, independentment de l'ordre emprat en la iteració. El teorema de Fubini, que establirem en el proper apartat, delimita la validesa d'aquesta inferència.

Algunes aplicacions de les integrals múltiples

Quan hem introduït la noció d'integral en dues variables ja hem esmentat el problema subjacent del càlcul del volum de cossos de l'espai \mathbb{R}^3 . En aquest capítol anem a presentar alguns exemples del càlcul d'àrees i volums, i també algunes aplicacions físiques de la noció d'integral. Cal tenir present que amb aquestes aplicacions volem il·lustrar la utilitat del concepte d'integral de diverses variables i que, per tant, aquesta discussió no pot substituir els tractats de física més específics.

3.1 Càlcul d'àrees i volums

Les aplicacions més immediates de les integrals múltiples són al càlcul d'àrees de regions del pla i volums de l'espai ordinari. Vegem-ne ara alguns exemples.

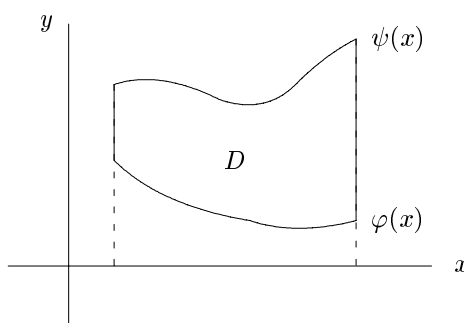


Figura 3.1: Àrea entre dues funcions

Si D és una regió elemental del pla, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ja havíem definit àrea de D per

$$A(D) = \int_D dx dy .$$

Observem que l'àrea de D no està definida a priori i que amb aquesta integral la definim com el volum del cilindre de base D i alçada 1, cosa que fa que aquesta definició sigui coherent amb la intuïció geomètrica.

3.1.1 Exemple Si D és una regió donada per

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

aleshores, la definició de l'àrea de D dona

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_D dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \\ &= \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx. \end{aligned}$$

Recuperem així l'expressió de l'àrea d'aquestes regions que es té del càlcul d'una variable.

3.1.2 Exemple Àrea d'una regió donada en coordenades polars per

$$g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1.$$

En aquest cas tenim

$$A(D) = \int_D dx dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} r dr = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (f(\theta)^2 - g(\theta)^2) d\theta.$$

Per exemple, calculem l'àrea exterior a la circumferència $r = 2$ i interior a la cardioide $r = 2(1 + \cos \theta)$. Donada la simetria de la figura 3.2, l'àrea demanada és el doble de l'àrea escombrada en variar θ de 0 a $\pi/2$. Així, trobem que

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2} \Big|_2^{2(1+\cos \theta)} d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 4 \left[2 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi + 8. \end{aligned}$$

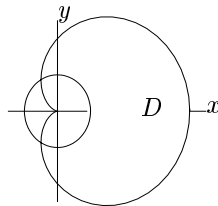


Figura 3.2: Cardioide $r = 2(1 + \cos \theta)$

Si B és un cos elemental de \mathbb{R}^3 , es defineix el volum de B per

$$\text{vol}(B) = \int_B dx dy dz.$$

3.1.3 Exemple Si B és un cos donat per

$$B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

aleshores, es té que

$$\text{vol}(B) = \int_D (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) dx dy,$$

on D és el domini del pla donat per $\{(x, y) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

3.1.4 Exemple Calculem el volum que s'elimina quan en una esfera de radi $2a$ hi fem un forat de radi a , de manera que l'eix de l'orifici sigui un diàmetre de l'esfera, (vegeu la figura 3.3).

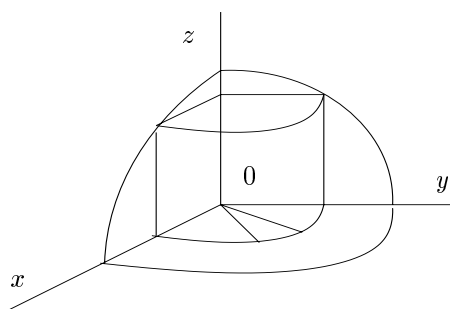


Figura 3.3: Esfera foradada per un cilindre

De la figura deduïm que el volum demanat és 8 vegades el corresponent al primer octant limitat pel cilindre $x^2 + y^2 = a^2$, l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ i el pla $z = 0$. Usant coordenades cilíndriques, l'esfera s'escriu com a $z = \sqrt{4a^2 - r^2}$, i es té que

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{4a^2 - r^2} r dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (8a^3 - 3\sqrt{3}a^3) d\theta = \frac{4}{3} (8 - 3\sqrt{3}) a^3 \pi.$$

3.1.5 Exemple *Volum d'un cos de revolució.* Sigui $\alpha(x) = (x, f(x))$ una corba en el pla x, z definida per la funció f , amb $a \leq x \leq b$, i sigui B el cos de revolució donat per

$$B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

(Vegeu la figura 3.4.) Aleshores el volum de B és

$$\text{vol}(B) = \int_B dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y^2 + z^2 \leq f(x)^2} dy dz,$$

Integració de funcions sobre corbes i superfícies

En molts processos de la física i de les aplicacions és convenient modelitzar un cos de l'espai mitjançant una corba o una superfície, de manera que el model sigui més senzill que l'objecte original. Així, sovint es tracta un filferro (o un fil conductor) com una línia o una placa com una superfície, com si no tinguessin volum. Tot i això, aquests models estan dotats d'una funció de densitat de massa. Si volem determinar la massa d'una línia material de l'espai \mathbb{R}^3 a partir de la seva funció de densitat, no podem integrar la funció com si fos de tres variables, sinó que cal fer referència al fet que la línia és de dimensió 1. És així com sorgeix el concepte d'integral de trajectòria que introduïm en aquest capítol. Anàlogament, si la massa que volem calcular és la d'una placa, la integral corresponent és una integral de superfície.

Aquestes són aplicacions del càlcul integral que podríem haver inclòs en el capítol anterior. No obstant això, hem preferit dedicar un capítol específic a aquestes qüestions que aprofitarem, alhora, per repassar els conceptes geomètrics de corba i superfície de l'espai, cosa que ens serà de molta utilitat en els capítols següents.

4.1 Longitud d'una trajectòria

En aquest apartat analitzem el concepte de longitud d'una corba i com calcular-la. Per fer-ho, començarem recordant les definicions de trajectòria i de corba associada.

La idea intuïtiva de trajectòria respon a la del recorregut descrit per una partícula a mesura que passa el temps. Així, per conèixer la trajectòria cal conèixer la posició de la partícula en cada instant, és a dir, les seves coordenades en funció del temps. Formalitzem aquesta idea de la forma següent.

4.1.1 Definició Una trajectòria, o camí, és una aplicació, derivable amb continuïtat, σ d'un interval tancat $I = [a, b]$ a \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned}\sigma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\longmapsto \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)).\end{aligned}$$

La variable real t rep el nom de *paràmetre* (o també, *temps*) de la trajectòria σ . A la imatge de I per σ , $\sigma(I)$, l'anomenarem *la corba associada* a la trajectòria σ . És a dir, la corba associada a una trajectòria correspon al conjunt de punts pels quals passa la trajectòria al llarg del temps $t \in [a, b]$, mentre que el terme *trajectòria* es reserva per a la forma en la qual es descriu el pas per aquests punts. És clar, per tant, que dues trajectòries diferents poden tenir la mateixa corba associada.

En la definició de trajectòria hem imposat que σ sigui derivable, de fet amb continuïtat. La derivada de σ ,

$$\begin{aligned} \sigma' : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \end{aligned}$$

defineix el *vector tangent* $\sigma'(t)$ en cada punt, $\sigma(t)$, de la trajectòria. El mòdul d'aquest vector indica la velocitat amb la qual es recorre la corba associada a la trajectòria.

4.1.2 Exemples

1. Considerem les trajectòries planes $\sigma, \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definides per

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\cos t, \sin t), \\ \gamma(t) &= (\cos 2t, \sin 2t), \end{aligned}$$

respectivament. Ambdues trajectòries tenen la circumferència $x^2 + y^2 = 1$ com a corba associada, però mentre que σ fa una volta al llarg de la circumferència, γ en fa dues. Observem que les velocitats corresponents són 1 i 2, respectivament.

2. La cicloide és la corba plana descrita per un punt de la circumferència unitat quan aquesta roda al llarg de l'eix de les x (vegeu la figura 4.1). Si t és l'angle de gir de la circumferència, l'equació paramètrica de la cicloide és

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

La cicloide completa un cicle quan $0 \leq t \leq 2\pi$.

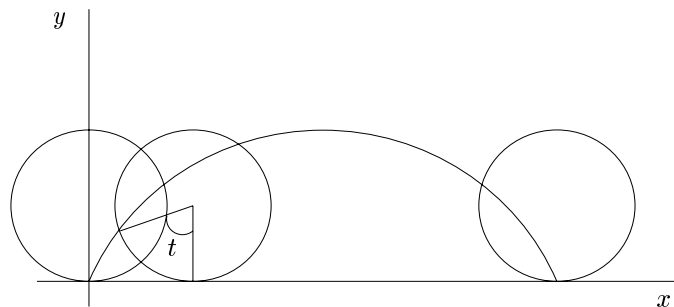


Figura 4.1: Una cicloide

3. La trajectòria $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t),$$

descriu una volta de l'hèlice circular (vegeu la figura 4.2).

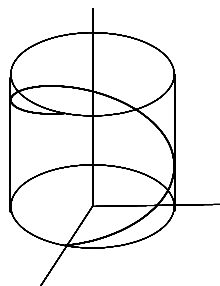


Figura 4.2: Hèlice circular

Com podem mesurar la longitud d'una trajectòria? Ho farem per un procés d'aproximació: considerem una trajectòria σ , que suposarem que és *simple*, és a dir, que és injectiva, o sense autointerseccions (encara que això no és necessari). Podem aproximar la longitud de la corba associada a la trajectòria per la longitud d'una corba poligonal formada per un nombre finit de segments que uneixen diferents punts de la trajectòria (vegeu la figura 4.3). En efecte, sigui $P = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$, amb $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, una partició d'ordre k de l'interval I . La longitud de la corba poligonal formada pels segments que uneixen $\sigma(t_i)$ i $\sigma(t_{i+1})$, $i = 0, \dots, k-1$, que denotarem per $\ell(P)$, és igual a

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^k \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| .$$

Signi $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq k} \{t_i - t_{i-1}\}$ la norma de la partició. És clar que si afegim més punts a una partició donada, la corba poligonal corresponent s'ajusta millor a la corba original (vegeu la figura 4.3). Això dóna sentit a la definició que segueix.

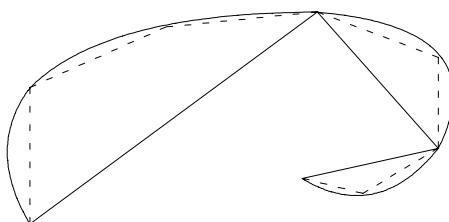


Figura 4.3: Poligonal inscrita a una corba

4.1.3 Definició La longitud d'una trajectòria σ és el límit de les longituds de les poligonals inscrites, $\ell(P)$, quan la norma de P tendeix a zero, és a dir,

$$\ell(\sigma) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ell(P) .$$

Camps escalars i camps vectorials

Alguns fenòmens físics poden ser descrits mitjançant funcions. Per exemple, la temperatura d'un sòlid pot ser descrita per una funció que a cada punt (x, y, z) de la regió de l'espai U que ocupa el sòlid li associa la seva temperatura $f(x, y, z)$. Coneguda la funció $f(x, y, z)$, les integrals estudiades en el capítol anterior permeten trobar, per exemple, la temperatura mitjana del sòlid en qüestió.

Altres fenòmens no poden ser descrits totalment per simples funcions. Així, per exemple, pel moviment d'un fluid no n'hi ha prou, posem per cas, amb conèixer el mòdul de la velocitat del fluid en cada punt de l'espai que ocupa. Cal conèixer també la direcció i el sentit del seu moviment. La qual cosa ens du a associar a cada punt no pas un nombre real, un escalar, sinó un vector, i aleshores parlarem de *camps vectorials*.

En aquest capítol, que és una introducció als camps vectorials, es plantegen els aspectes diferencials i integrals associats als camps vectorials. Les integrals que anem a definir per a aquests camps vectorials, *circulació* i *flux*, ens permetran calcular, per exemple, la quantitat de fluid per unitat de temps (flux) que travessa una secció d'un canal de conducció del qual coneixem el camp de velocitats $F(x, y, z)$ en cada punt. En el proper capítol veurem d'altres aplicacions d'aquestes integrals.

5.1 Camps vectorials

La formulació matemàtica de la noció de camp vectorial és:

5.1.1 Definició *Un camp vectorial de \mathbb{R}^3 és una aplicació*

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \end{aligned}$$

on $U \subseteq \mathbb{R}^3$. El camp F s'anomena *continu*, *derivable*, C^∞ , etc., si les funcions escalars $P, Q, R : U \longrightarrow \mathbb{R}$ són *contínues*, *derivables*, C^∞ , etc.

Anàlogament, un camp vectorial de \mathbb{R}^2 , o *camp vectorial pla*, és una aplicació

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \end{aligned}$$

on U és una regió de \mathbb{R}^2 i $P, Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions.

5.1.2 Observacions

1. En general, suposarem que els camps vectorials que considerem són suficientment derivables, per exemple \mathcal{C}^∞ , en el domini on estan definits, de manera que tinguin sentit les operacions de derivació que efectuem a les seves funcions coordenades.
2. Llevat que es digui explícitament el contrari, tot el que fem per a camps de l'espai \mathbb{R}^3 val per a camps de \mathbb{R}^2 . Per tant, tot sovint veurem tan sols un dels dos casos.

5.1.3 Exemples

1. En la figura 5.1 hi ha representats els camps vectorials $F(x, y) = (1, 0)$, que és un camp constant, i $G(x, y) = (y, -x)$. La representació suggereix que aquest darrer camp vectorial “gira” al voltant de l'origen. Concretarem tot seguit aquesta interpretació en termes de les línies de flux d'un camp vectorial.

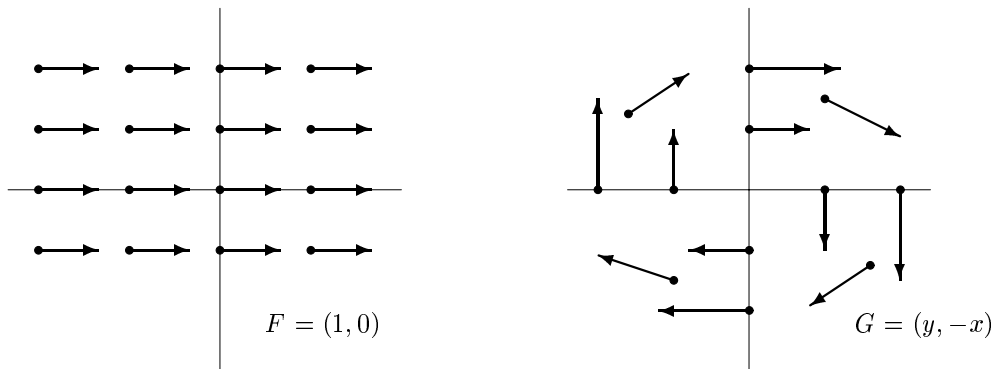


Figura 5.1: Alguns camps vectorials plans

2. Les forces que actuen en diferents punts de l'espai formen un camp vectorial. Per exemple, segons la llei de gravitació universal de Newton, el *camp gravitatori* creat per una partícula de massa M és igual a

$$F(x, y, z) = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}, \quad r = \|\vec{r}\|,$$

on (x_0, y_0, z_0) són les coordenades de la massa M , $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, i G és la constant universal.

Experimentalment s'ha demostrat que el camp gravitatori és additiu, en el sentit que el camp creat per dues masses puntuals és la suma dels camps individuals corresponents a cadascuna de

les masses. Estenent aquest principi de superposició a una distribució de massa ρ que ocupa un volum W , el camp gravitatori corresponent en un punt (x_1, y_1, z_1) de l'espai es defineix (llevat de constants) per la integral vectorial

$$F(x_1, y_1, z_1) = - \int_W \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dx dy dz,$$

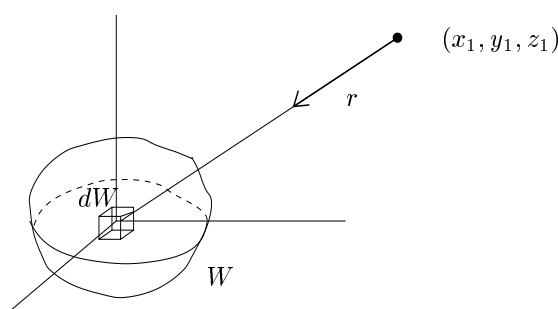


Figura 5.2: Camp gravitatori

que té per components

$$\begin{aligned} P &= - \int_W \frac{\rho(x_1 - x) dx dy dz}{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2)^{3/2}}, \\ Q &= - \int_W \frac{\rho(y_1 - y) dx dy dz}{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2)^{3/2}}, \\ R &= - \int_W \frac{\rho(z_1 - z) dx dy dz}{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Si el punt (x_1, y_1, z_1) és extern a la massa W , aleshores les funcions subintegrals són funcions contínues a W i, per tant, integrables. En canvi, si el punt és de W , aleshores les integrals són impròpies. Observem, però, que en qualsevol cas, són integrals convergents, ja que podem aplicar el criteri de comparació que se segueix de l'exemple 2.7.6 del capítol 2.

3. Segons la llei de Coulomb, el camp elèctric determinat per una càrrega elèctrica puntual (i estàtica) Q és igual a

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r},$$

on ϵ_0 és el valor de la permissivitat en el buit, de manera que la força exercida per Q sobre una càrrega q és igual a qE . Experimentalment s'ha comprovat que, com en el cas dels camps gravitatoris, el camp elèctric satisfà el principi de superposició. Eliminant un cop més les constants, el camp elèctric definit per una distribució contínua de càrregues ρ en el volum W es igual a la integral vectorial

$$E = \int_W \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dx dy dz.$$

Aquí hem de tenir present que la distribució de càrregues elèctriques és sempre discreta. De tota manera, per a fenòmens d'escala suficientment gran comparada amb l'escala atòmica,

Els teoremes integrals i aplicacions

El teorema fonamental del Càlcul estableix la igualtat

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

és a dir, que quan s'integra la derivada d'una funció, $f'(x)$, en un interval, $[a, b]$, el resultat que s'obté és la diferència de valors de la funció $f(x)$ en els extrems de l'interval. En aquest capítol presentem els coneguts com els teoremes integrals del càlcul vectorial que relacionen les integrals de línia, de superfície i de volum amb els operadors diferencials que actuen sobre els camps escalars i vectorials, el gradient, el rotacional i la divergència. Interpretats adequadament, aquests resultats generalitzen el teorema fonamental del càlcul abans esmentat en cadascuna de les situacions que es donen en la integració vectorial. Són els teoremes de Green, de Stokes i de de la divergència de Gauss.

Els resultats d'aquest capítol van tenir l'origen en la física matemàtica del XIX. Al llarg de l'exposició presentem, a títol indicatiu, alguns exemples que reflecteixen aquesta vinculació amb les aplicacions a la física matemàtica, tot i que per a un estudi més complet és convenient consultar la bibliografia especialitzada corresponent.

6.1 El teorema de Green

En aquest apartat establim l'anomenada fórmula de Green que expressa la relació entre una integral de línia del pla

$$\int_C Pdx + Qdy,$$

calculada al llarg del contorn C d'un domini del pla D i una integral doble en aquest domini.

Per tal d'enunciar el teorema de Green és convenient fixar una terminologia adequada: per una *corba tancada simple* del pla entendrem una corba tancada sense autointerseccions, (vegeu la figura 6.1).

Una regió D del pla direm que és *simplement connexa* si és connexa i la regió tancada per tota corba tancada simple de D està tota continguda a D . Per exemple, a la figura 6.2 veiem dues

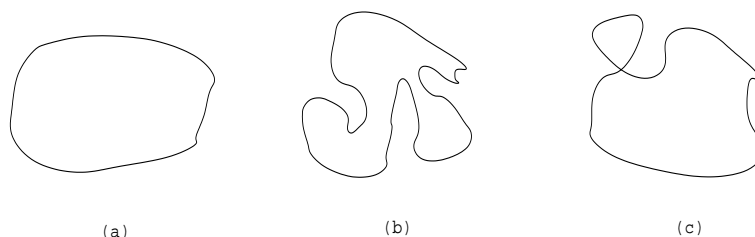


Figura 6.1: Corbes tancades del pla

regions simplement connexes, la (a) i la (b), mentre que no ho són les altres dues. De fet, en la figura (c) una circumferència centrada a l'origen com la dibuixada és una corba tancada simple de D , però el disc que encercla aquesta circumferència no està tot a D , ja que la regió D no conté l'origen.

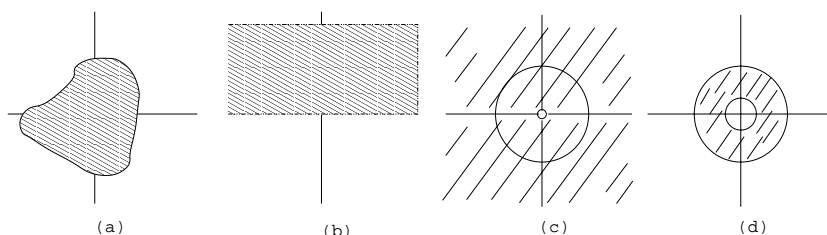


Figura 6.2: Regions del pla

Intuïtivament, una regió plana és simplement connexa si és d'una sola peça (això és la connexió) i no té forats.

Podem ara enunciar el teorema de Green.

6.1.1 Teorema de Green *Sigui D una regió elemental del pla, simplement connexa i sigui $C = \partial D$ la corba que l'envolta. Sigui $F = (P, Q)$ un camp vectorial, derivable amb continuïtat a D . Aleshores se satisfà que*

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

on C^+ indica que recorrem la corba C (que és una corba tancada) en sentit antihorari.

Demostració. Provarem el resultat per a un tipus especial de regió D i indicarem com es tractaria el cas general, de desenvolupament molt més tècnic.

Suposarem que D és una regió tal que tota recta vertical i tota recta horitzontal tallen la seva frontera com a màxim en dos punts, (vegeu la figura 6.3).

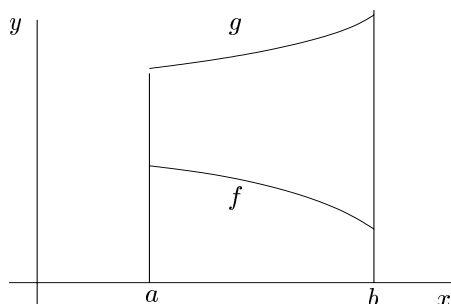


Figura 6.3: Regió pel teorema de Green

Aleshores la corba C que l'envolta està formada pels gràfics de dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, de manera que la regió es pot descriure per les desigualtats

$$a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x).$$

Provem que se satisfà la igualtat

$$\int_{C^+} P dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

D'una banda, podem aplicar el teorema de Fubini de la forma següent:

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx. \end{aligned}$$

De l'altra, utilitzant la definició d'integral de línia al llarg de C , el fet que al llarg dels segments $x = a$ i $x = b$ la forma diferencial $P dx$ és zero, i que el sentit de recorregut és antihorari trobem que

$$\int_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx,$$

i, per tant, trobem justament el valor oposat al càlcul anterior.

Tal com hem escollit D , la situació és simètrica respecte de les variables x i y , per la qual cosa es prova anàlogament que

$$\int_{C^+} Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy,$$

i això acaba la demostració en aquest cas.

El cas general se segueix de descompondre una regió D en un nombre finit de regions com les del cas particular que hem provat, (vegeu la figura 6.4), i aplicar el resultat a cadascuna d'aquestes regions, aprofitant el teorema d'additivitat de les integrals i el fet que les integrals que apareguin al llarg dels talls practicats per obtenir la descomposició es cancel·laran dos a

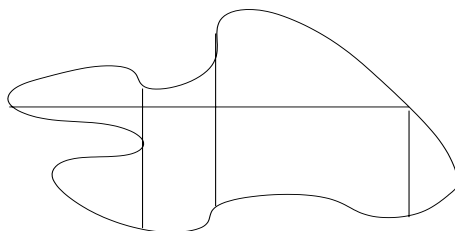


Figura 6.4: Descomposició d'una regió en regions simples

dos. En els exemples i situacions que es presenten a la pràctica serà clar com obtenir una descomposició com l'esmentada, tot i que provar-ne l'existència en general resulta un afer molt tècnic, que no tractarem. ■

6.1.2 Exemple En aquest exemple verifiquem el teorema de Green en una regió determinada: sigui D el semicercle definit per $x^2 + y^2 \leq 1$ i $y \geq 0$, i considerem el camp vectorial $F = (x + y, xy)$. Calculem la circulació de F al llarg de la corba que envolta D : aquesta corba està formada pel segment C_1 , definit per $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$, i la semicircumferència de radi 1, C_2 , recorreguda des del punt $(1, 0)$ fins al punt $(-1, 0)$, (vegeu la figura 6.5).

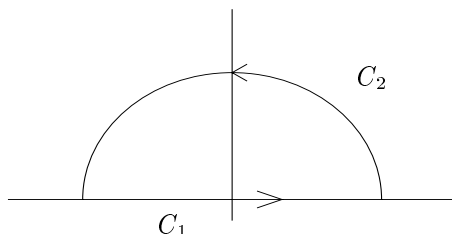


Figura 6.5: Regió de l'exemple 6.1.2

Així, les parametritzacions de C_1 i C_2 donades per

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= (t, 0), & -1 \leq t \leq 1, \\ \sigma_2(t) &= (\cos t, \sin t), & 0 \leq t \leq \pi,\end{aligned}$$

respectivament, són positives. La circulació de F és, per tant,

$$\begin{aligned}\int_C (x + y)dx + xydy &= \int_{-1}^1 t dt + \int_0^\pi (\cos t + \sin t)d(\cos t) + \cos t \sin t d(\sin t) \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \int_0^\pi (-\cos t \sin t - \sin^2 t + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \frac{\cos^2 t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

D'altra banda, si integrem l'altre terme de la fórmula de Green trobem:

$$\begin{aligned}
 \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_D (y - 1) dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy - \frac{\pi}{2} \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx - \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 - \frac{\pi}{2} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

resultat que coincideix, com era d'esperar, amb el càlcul anterior.

6.1.3 Observació Hem enunciat el teorema de Green per a regions simplement connexes, però de fet pot aplicar-se a regions molt més generals, com per exemple a una corona circular, (que no és simplement connexa). En aquests casos, la regió pot estar envoltada per més d'una corba, dues circumferències en el cas d'una corona circular, cadascuna de les quals contribuirà a la fórmula de Green amb la integral de línia corresponent, essent molt important recórrer cadascuna de les corbes en el sentit adequat. Anem a concretar aquest comentari veient com deduir la fórmula de Green per a una corona circular, (vegeu la figura 6.6).

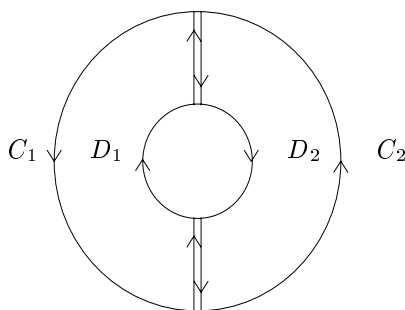


Figura 6.6: Descomposició d'una corona circular

Utilitzant les notacions de la figura, descomponem la corona en dues regions, $D = D_1 \cup D_2$, cadascuna de les quals és simplement connexa. Per l'additivitat de la integral es té que

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \int_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

i, aplicant el teorema de Green a cadascuna d'aquestes regions, deduïm la igualtat:

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C_1^+} P dx + Q dy + \int_{C_2^+} P dx + Q dy,$$

on C_1 i C_2 són les corbes que envolten D_1 i D_2 , respectivament, recorregudes en sentit antihorari. Observem que els segments verticals de C_1 i C_2 estan recorreguts en sentits oposats, segons

es recorrin formant part de C_1 o de C_2 , per la qual cosa les integrals corresponents a aquests segments en la darrera igualtat es cancel·len. Així, si C_r i C_R són les circumferències de radis r i R , $r < R$, que delimiten la corona, trobem que

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C_r^+} P dx + Q dy + \int_{C_R^+} P dx + Q dy,$$

on ara, C_R està recorreguda en sentit antihorari, mentre que C_r ho està en sentit horari.

El fet de canviar el sentit de recorregut per a la circumferència interna pot induir a confusió. De fet, el sentit de recorregut de la vora d'un domini del pla està determinat per la següent regla general: el sentit de recorregut de cadascuna de les corbes és tal que el parell de vectors format pel vector normal sortint de la corona i el que dona el sentit de recorregut formen una base directa. Més endavant, quan parlem del teorema de Stokes, tornarem a aquest punt.

Ara és senzill deduir com aplicar el teorema de Green a una regió com la de la figura 6.7. En aquest cas serà:

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i^+} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

on el signe + en cadascuna de les corbes indica que està recorreguda en el sentit marcat a la figura 6.7.

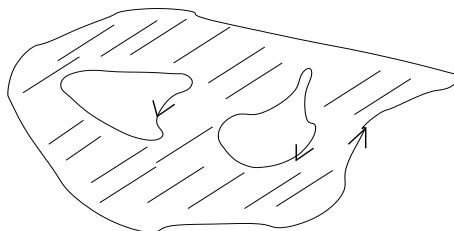


Figura 6.7: Orientació d'una regió múltiplesment connexa

L'exemple següent és una verificació de la versió més general del teorema de Green que acabem d'establir.

6.1.4 Exemple Sigui D la corona definida per $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, i considerem el camp vectorial $F = (x^2 y, x)$. La vora de D està formada per les circumferències centrades a l'origen de radis 1 i 2, que parametritzarem, d'acord amb el criteri de l'observació 6.1.3, per

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (\sin t, \cos t), \\ \sigma_2(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t), \end{aligned}$$

respectivament. Així, la integral de línia de F al llarg de la vora de D es calcula de la forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma_1} x^2 y dx + x dy + \int_{\sigma_2} x^2 y dx + x dy &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t d(\sin t) + \sin t d(\cos t) \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t \cdot 2 \sin t d(2 \cos t)) + 2 \cos t d(2 \sin t) \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t - \sin^2 t - 16 \cos^2 t \sin^2 t + 4 \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 t - 15 \cos^2 t \sin^2 t) dt \\
 &= 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} (3 \cos^2 t - 15 \cos^2 t \sin^2 t) dt \\
 &= 2(3B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) - 15B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) \\
 &= 3\pi - \frac{15\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

D'altra banda, hem de calcular la integral a D de

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2.$$

Per fer-ho, usem coordenades polars:

$$\begin{aligned}
 \int_D (1 - x^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (1 - r^2 \cos^2 \theta) r dr \\
 &= \left. \pi r^2 - \frac{r^4}{4} 2B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \right|_1^2 \\
 &= 4\pi - 4\pi - \pi + \frac{1}{4}\pi \\
 &= -\frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Tal com era d'esperar, els dos càlculs coincideixen.

Aplicació: Àrea d'una regió plana com una integral curvilínia

Una primera aplicació del teorema de Green és el càlcul de l'àrea de regions planes mitjançant una integral de línia al llarg de la seva vora: sigui D una regió elemental del pla que té per vora una corba C ; aleshores, l'àrea de D està donada per

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{C^+} -y dx + x dy.$$

En efecte, si apliquem el teorema de Green al camp vectorial $(-y, x)$ en la regió D trobem la fórmula enunciada:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} -y dx + x dy &= \int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \int_D dx dy \\ &= 2A(D). \end{aligned}$$

Posem dos exemples per il·lustrar l'interès de la fórmula obtinguda.

6.1.5 Exemples

1. Sabem que l'àrea tancada per l'el·lipse definida per

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

és igual a πab . Calculem aquesta àrea mitjançant la fórmula anterior: hem de recórrer l'el·lipse en sentit antihorari, per la qual cosa la parametritzem segons: $\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, amb $0 \leq t \leq 2\pi$. Així, trobem que

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -b \sin t d(a \cos t) + a \cos t d(b \sin t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

2. Aquesta manera de calcular l'àrea d'una regió plana resulta imprescindible quan només coneixem la corba que envolta la regió D per una parametrització: si $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, amb $a \leq t \leq b$, aleshores la fórmula anterior es transforma en

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_{\sigma} -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b -y x' dt + x y' dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (x y' - y x') dt. \end{aligned}$$

Per exemple, calculem l'àrea tancada per una volta de la cicloide i l'eix x , (vegeu la figura 6.8).

La corba que envolta D està formada pel segment $0 \leq x \leq 2\pi$, $y = 0$, de l'eix x , recorregut en sentit creixent, i l'arc de cicloide determinat per

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

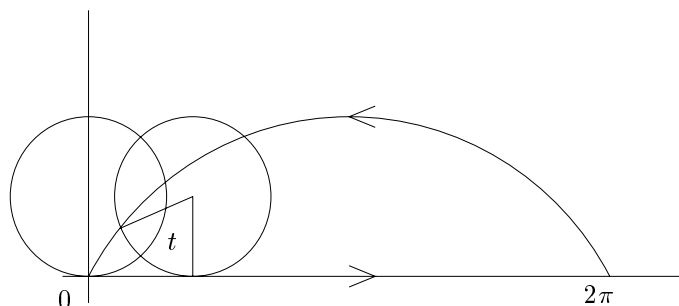


Figura 6.8: Una volta de cicloide

que haurem de recórrer en sentit invers, des del punt $(2\pi, 0)$ fins al punt $(0, 0)$.

Sobre el segment de l'eix x es té que

$$-ydx + xdy = 0,$$

ja que y és constant i igual a zero. Així doncs, només caldrà integrar la forma diferencial $-ydx + xdy$ sobre l'arc de cicloide per tal de calcular l'àrea de D . Tenint present que $\sigma(t)$ recorre la corba en el sentit contrari del que hem de calcular, en resulta:

$$\begin{aligned} A(D) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((t - \sin t) \sin t - (1 - \cos t)(1 - \cos t)) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t \sin t - 2 + 2 \cos t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left| -t \cos t + \sin t - 2t + 2 \sin t \right|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} (-4\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

Camps conservatius plans

Una altra aplicació del teorema de Green és la caracterització dels camps vectorials plans que són conservatius, és a dir, que provenen de potencial:

6.1.6 Teorema *Sigui D una regió elemental del pla simplement conexas. Un camp vectorial $F = (P, Q)$ és conservatiu si i només si*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

En efecte, sabem que la condició és necessària. També és suficient: si es dona la condició de l'enunciat, la circulació de F per qualsevol corba tancada de D serà zero, com es dedueix per

aplicació de la fórmula de Green. Però aquesta és una condició equivalent al fet que F sigui conservatiu. ■

La hipòtesi que D sigui un domini simplement connex (és a dir, sense forats) és fonamental, com mostra l'exemple següent.

6.1.7 Exemple Considerem el camp vectorial definit per

$$F = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Aquest camp vectorial està definit, i és derivable amb continuïtat, a tots els punts del pla llevat de l'origen. Així, el teorema de Green li és aplicable en tota regió que no encercli l'origen, però no el podem aplicar, per exemple, al disc unitat.

El camp F satisfà (allà on està definit):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

De tota manera, el camp no és conservatiu en el disc unitat menys l'origen. En efecte, si ho fos, la circulació de F al llarg de qualsevol corba tancada hauria de ser zero, mentre que el càlcul directe que segueix mostra que no és així: la integral de F al llarg de la circumferència centrada a l'origen i de radi 1, recorreguda en sentit antihorari, és

$$\begin{aligned} \int_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d(\cos t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d(\sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

6.2 El teorema de Stokes. Camps conservatius

En aquest apartat establim el teorema de Stokes, també conegut com a *teorema del rotacional*, que és un resultat que expressa la relació entre les integrals de línia i les integrals de superfície. El teorema de Stokes conté, com a cas particular, el teorema de Green que ja hem establert. A més, del teorema de Stokes deduirem una interpretació física del rotacional d'un camp vectorial, independent del sistema de coordenades que emprem, i caracteritzarem (amb les hipòtesis adequades) els camps conservatius com aquells que són irrotacionals.

Apèndix A: Taula de primitives

Per a la comoditat del lector, recollim en aquest apèndix algunes de les primitives més usuals que apareixen al llarg del text. Una taula molt més completa es troba al llibre *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*, citat a la bibliografia.

1. $\int (uv') = uv - \int (vu')$.
2. $\int (a^u u') = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0.$
3. $\int (u' \cos u) = \sin u + C.$
4. $\int (u' \sin u) = -\cos u + C.$
5. $\int (ax + b)^n = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1.$
6. $\int (ax + b)^{-1} = \frac{1}{a} \ln ax + b + C.$
7. $\int x(ax + b)^{-1} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln ax + b + C.$
8. $\int x(ax + b)^{-2} = \frac{1}{a^2} \left[\ln ax + b + \frac{b}{ax + b} \right] + C.$
9. $\int \frac{1}{x(ax + b)} = \frac{1}{b} \ln \left \frac{x}{ax + b} \right + C.$
10. $\int (\sqrt{ax + b})^n = \frac{2}{a} \frac{(\sqrt{ax + b})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2.$

11.	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}.$
12. a)	$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad \text{si } b < 0.$
b)	$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right + C, \quad \text{si } b > 0.$
13.	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} + C.$
14.	$\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
15.	$\int \frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C.$
16.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arg} \sinh \frac{x}{a} + C = \ln \left x + \sqrt{a^2+x^2} \right + C.$
17.	$\int \sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arg} \sinh \frac{x}{a} + C.$
18.	$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a + \sqrt{a^2+x^2}}{x} \right + C.$
19.	$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C.$
20.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
21.	$\int \sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$
22.	$\int x^2 \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{8} x \sqrt{a^2-x^2} (a^2-2x^2) + C.$
23.	$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left \frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right + C.$
24.	$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = -\arcsin \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$

Apèndix B: Les funcions d'Euler

Al llarg del text hem suposat conegudes, en diferents punts, com ara quan hem establert la fórmula de Dirichlet, les funcions Γ i B d'Euler. En aquest breu apèndix recordem la definició d'aquestes funcions, així com algunes de les fórmules associades.

La funció gamma: Γ

Si $x > 0$, es defineix la funció Γ com la integral impròpia

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

La funció Γ està ben definida (en el sentit que és una integral convergent) per a tot $x > 0$, i és una funció C^∞ per a aquests valors. La propietat fonamental de Γ és la relació funcional que estableix el resultat següent.

Proposició. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

En efecte, el resultat se segueix d'integrar per parts:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \quad \blacksquare$$

Com que $\Gamma(1) = 1$, de la proposició anterior se segueix que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

A més, al capítol 2 hem provat que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

d'on se segueix que

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

La funció beta: B

Per a $x, y > 0$ es defineix la funció beta d'Euler per

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

De les propietats de la funció B destaquem:

Proposició.

1. $B(x, y) = B(y, x)$.
2. $B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta$.
3. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
4. $B(x, y) = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{(1+v)^{x+y}} dv$.

La primera propietat és clara. Quant a la segona, considerem el canvi de variable

$$t = \sin^2 \theta, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Aleshores, es té que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2} \theta \cos^{2y-2} \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Provem ara 3: en el producte $\Gamma(x)\Gamma(y)$,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt,$$

fem el canvi de variable $t = u^2$, $t = v^2$ i calculem la integral resultant utilitzant coordenades polars:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-2} \cdot 2u du \cdot \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-2} 2v dv \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2-v^2} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1} \theta r^{2y-1} \sin^{2y-1} \theta r dr \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \cdot 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-1} dr \\ &= B(x, y) \cdot \Gamma(x+y). \end{aligned}$$

Deixem la quarta propietat com a exercici. ■

La propietat 3, juntament amb el càlcul de Γ en els enters i els semienters, permet calcular la funció B en punts de coordenades enteres i semienteres. Per exemple,

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2}.$$

Conjugant les propietats 2 i 3 trobem que

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

En particular,

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \cos^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+2}{2}\right)}.$$

Així, per exemple,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{96}.$$