AULA POLITÈCNICA
/ MATEMÀTICA I ESTADÍSTICA

M. Rosa Estela Carbonell

Fonaments de càlcul

EDICIONS UPC

AULA POLITÈCNICA
/ MATEMÀTICA I ESTADÍSTICA

M. Rosa Estela Carbonell

Fonaments de càlcul

EDICIONS UPC

"Vaig aprendre a aprendre per a poder ensenyar, i vaig aprendre a ensenyar per a poder aprendre"

Luis A. Santaló

A tots els estudiants que he tingut a les meves classes de Càlcul i a totes les persones que tinguin interès a llegir aquest llibre. De manera molt especial als meus fills Anna i Eduard, perquè de moment, i encara que ho voldrien, no el poden llegir ni entendre.

Pròleg

Aquest llibre està pensat per ser un material de suport bàsicament a les assignatures de Càlcul de primer curs de les titulacions d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports i d'Enginyeria Geològica, encara que creiem que aquest text serà d'interès per a qualssevol estudiant de primer curs d'Escoles Tècniques i Facultats de Ciències. No es tracta d'un llibre de Càlcul de primer curs universitari sinó que volem posar a l'abast dels estudiants un material de treball que sigui coherent amb els nous plans d'estudis i que els faciliti l'entrada als seus estudis universitaris. Volem que trobin en aquest llibre els conceptes de matemàtiques bàsics per entendre'n bé molts d'altres que els explicarem a la Universitat.

La meva experiència de molts anys en la docència, parlar amb els companys i amb els alumnes, ens ha fet veure que hi ha molts conceptes que els estudiants no tenen ben assolits, i el que potser ens preocupa més és que moltes vegades no saben on anar a buscar-los. En aquest sentit volem facilitar-los la feina i creiem que aquest llibre serà una bona eina d'estudi que servirà per millorar el seu rendiment en l'assignatura de Càlcul i en moltes altres de la titulació on estiguin ubicats els estudiants. Amb els comentaris de professors i estudiants he intentat recopilar tots aquells temes en què en un moment o un altre veiem que hi ha estudiants que tenen mancances. S'ha fet una prova donant material als estudiants, i com que la resposta per part d'ells ha estat molt positiva això m'ha motivat a posar-me de forma més seriosa i en format de llibre a treballar en aquesta línia.

Els objectius principals d'aquest llibre són donar a l'estudiant un material que li serveixi per consolidar conceptes que ha rebut en algun moment previ a la seva entrada a la universitat i explicar-ne amb detall d'altres que ha vist de forma molt simplificada.

Al llibre hi trobareu capítols que tenen conceptes que no s'han explicat mai a secundària però que hem cregut convenient afegir-los. Per exemple, les quàdriques (molt importants per a l'estudi del càlcul diferencial de diverses variables) i l'estudi del càlcul de primitives és més detallat del que els estudiants haurien de saber, però creiem que, per la seva importància en moltes assignatures tècniques, els anirà molt bé tenir-ne un estudi més ampli que els permeti cercar un major nombre de primitives. Ells poden entendre el que se'ls explica perquè les novetats bàsicament fan referència a la utilització de diferents canvis de variable (mètode conegut per la gran majoria d'estudiants de batxillerat).

En gairebé cada capítol s'hi ha inclòs una nota històrica perquè m'ha semblat interessant situar, encara que de manera molt breu, en perspectiva històrica els diferents conceptes que s'introdueixen. De la mateixa manera, he intentat fer referència a curiositats relacionades amb les matemàtiques sempre que he pogut per tal de fer el llibre més atractiu intentant no perdre en cap moment el rigor matemàtic.

El llibre conté tres apèndixs (àlgebra, estadística bàsica i progressions de nombres reals) de conceptes a vegades relacionats amb el càlcul i que hem cregut interessants. Per exemple, al capítol 4 de geometria cartesiana, s'utilitza el teorema de Rouché-Frobenius i el llenguatge de matrius que està explicat a l'ápèndix d'àlgebra.

Aquest llibre no és un llibre de problemes, tot i que hi ha alguns exemples que intenten aclarir els conceptes que es van definint. Veureu que es fa rerència a programes de càlcul informàtic com WIRIS, MAPLE i INTEGRATOR, com un exemple dels molts que existeixen. L'ús d'aquestes eines informàtiques permet que l'estudiant tingui un llibre de problemes fet a mida, en el sentit que es pot plantejar el problema que li interessi en un determinat moment i amb aquests programes pot obtenir la solució analítica o bé les representacions gràfiques que el poden ajudar a entendre el que està estudiant en un determinat moment. Hem cregut convenient posar en alguna ocasió les instruccions d'ús d'aquestes eines informàtiques que anem a comentar breument.

WIRIS és una eina de càlcul matemàtic que ofereix la Universitat Politècnica de Catalunya. Aquest és un servei de càlcul matemàtic, accessible per Internet i en català, desenvolupat íntegrament per Maths for More. Hi podeu accedir a la pàgina *http://wiris.upc.es* (per calcular control+enter o bé la fletxa vermella). La manera d'expressar els càlculs i els resultats és un llenguatge fidel a la notació habitual en matemàtiques, cosa que els fa intuïtius per a alumnes i professors. I la fa una eina ideal per a la docència de les matemàtiques ja que, a més, incorpora facilitats per a la generació de material educatiu en línia de manera àgil.
INTEGRATOR és una eina de càlcul realitzada amb Mathematica i que trobareu a l'adreça *http://integrals.wolfram.com*. Permet el càlcul de funcions primitives, simplement introduint la funció que volem i prement Enter.
MAPLE és un projecte del Symbolic Computation Group de la Universitat de Waterloo a Ontario, Canadà i està format per un nucli reduït d'instruccions elementals molt optimitzades i ja precompilades. Presenta un Help molt complet i té cinc tipus bàsics d'operacions: les simbòliques, les gràfiques, les numèriques, les d'entrada i sortida i les d'ajut.

Vull fer públic el meu agraïment, en primer lloc a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona per la concessió de l'ajut de la Convocatòria d'Ajuts a Projectes d'Innovació Educativa i Elaboració de Material Docent 2001, que ha fet possible la redacció d'aquest llibre. A l'estudiant Juan Murcia Delso perquè ell ha realitzat l'edició d'aquest text i els diferents gràfics i figures que hi apareixen. He disfrutat escrivint aquest llibre i ell m'ha posat la feina molt fàcil. Moltes gràcies Joan. El meu agraïment al meu amic i company de departament Eusebi Jarauta Bragulat que n'ha llegit tota la versió preliminar i ha fet suggeriments i observacions que m'han permès millorar molt el text. Un exemple és la visualització geomètrica del teorema de Pitàgores. Als meus amics Remei Calm Puig i Joan Puig Torres pels seus comentaris de diversos capítols. No cal dir que ells no són els responsables de les deficiències i/o errades no detectades, de les quals només l'autora és responsable i espera comprensió per part del lector. Qualsevol comentari al voltant d'aquest llibre serà molt ben rebut.

El meu agraïment a Sebastià Xambó Descamps pels seus gràfics que fan referència a les seccions de les quàdriques. A Pedro Diez Mejía, per les il·lustracions del Palau Geraci. A Juan Murcia Vela, per les fotografies del projecte d'enginyeria civil d'una passarel·la en forma de paraboloide

hiperbòlic. A Ramon Eixarch Ferrer, per la seva amable col·laboració en tot el que fa referència a WIRIS. A les meves amigues Alba i Sara Tegido, per la fotografia del pont de Brooklyn. A Carla Romeu, perquè ens ha ajudat a fer els gràfics de les còniques. A la Junta Constructora del Temple de la Sagrada Família i a la Reial Càtedra Gaudí per la seva col·laboració. A Xevi Roca i Agustí Medina, perquè m'han resolt tots els problemes tècnics. Al meu marit Salvador López Forment, perquè sempre he tingut el seu suport.

Vull agrair molt especialment als meus exalumnes i estudiants d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports, Xavier Gisbert Martín de Hijas i Juan Murcia Delso, que hagin acceptat escriure una breu història del Càlcul com a introducció d'aquest llibre. Ells són un exemple dels molts estudiants de qui tinc un bon record.

Vull donar les gràcies a tots els professors i estudiants que m'han fet arribar els seus comentaris sobre aquest text, fet que ha permès millorar el llibre en aquesta segona edició. Una menció especial pel professor Jaume Fabregat, agraint molt els seus comentaris. En aquesta segona edició, s'han corregit totes les errades detectades des de la primera edició.

Entre la primera i la segona edició d'aquest llibre hem treballat en el projecte d'innovació docent EVAM (Eina Virtual d'Autoaprenentatge de les Matemàtiques), que podeu trobar a l'adreça *http://wiris.upc.es/EVAM*. Aquest projecte està estretament relacionat amb els continguts del llibre "Fonaments de Càlcul" i consisteix bàsicament en la elaboració de material docent d'autoaprenentatge utilitzant la xarxa i la tecnologia WIRIS per al desenvolupament d'activitats interactives. L'hem desenvolupat personal docent i investigador de diversos centres docents de la UPC: Marta Ginovart, Eusebi Jarauta, Sebastià Xambó i ha estat coordinat per mi mateixa. Una de les principals avantatges del projecte EVAM és la interactivitat, fet que permet a l'estudiant resoldre en cada moment el problema que està tractant. Animem al lector a utilitzar-lo i estem convençuts de que ajudarà a entendre els conceptes que s'introdueixen en aquest llibre.

Per últim vull agrair a Edicions UPC l'edició d'aquest llibre i la bona acollida que sempre m'han dedicat. Moltes gràcies a tots.

Barcelona M. Rosa Estela
Novembre del 2005

Introducció històrica als inicis del Càlcul

Actualment, no hi ha dubte que el Càlcul Infinitesimal és una de les invencions més importants en la història de les Matemàtiques. S'atribueix el mèrit a Newton (1642-1727) i a Leibniz (1646-1716), però hi va haver altres matemàtics de l'època que van jugar un paper important en el seu desenvolupament. Els origens del Càlcul daten del segle XVII, quan es van plantejar una sèrie de problemes, tots ells relacionats amb la geometria. Podem agrupar aquests problemes en quatre grans grups. Són els següents:

1. La determinació de la velocitat i l'acceleració d'un cos, coneguda l'expressió de la distància en funció del temps. Apareix en aquest tipus de problema el concepte de "pas al límit" com a superació del "quocient incremental". També es planteja el problema invers: trobar la velocitat i la posició d'una partícula a partir de l'acceleració. L'exemple més representatiu d'aquesta classe de problemes és el d'una massa sotmesa a l'acció de la gravetat.

2. Un altre problema clàssic de l'època era trobar la tangent d'una corba. L'interès d'aquest problema no era només matemàtic, ja que tenia un gran àmbit d'aplicacio en la física, concretament en l'òptica (llei de reflexió, refracció).

3. Trobar el màxim o el mínim d'una funció o corba, és a dir, un problema d'optimització. L'exemple més paradigmàtic és potser el tir parabòlic: en el llançament d'un objecte, amb igualtat de velocitats inicials, quin és l'angle per al qual la distància horitzontal recorreguda es màxima? Aquest problema va motivar l'estudi de molts matemàtics durant el segle XVII.

4. Per últim, tenim els problemes relacionats amb corbes: trobar la longitud d'una corba, determinar l'àrea entre dues corbes, el volum entre dues superfícies, el centre de gravetat d'un cos, etc. El gran treball realitzat per Arquímedes (287-212 a.C.) en aquest àmbit de les Matemàtiques va obrir el camí per als matemàtics del segle XVII.

Com hem esmentat molts van ser els que van contribuir sens dubte a l'aparició del Càlcul en l'afany de resoldre els problemes enumerats: des dels grecs fins a Fermat (1601-1665), Descartes (1596-1650), Kepler (1571-1630) o Barrow (1630-1677). Però les figures que van establir les seves bases i van arribar a generalitzar més els conceptes relacionats van ser Newton i Leibniz.

Newton va partir d'un enfocament físic, donant resposta als problemes que ell mateix havia observat o s'havia plantejat. Va introduir el concepte de *derivada* definint-la com la velocitat d'un mòbil que es mou per una corba $f(x, y) = 0$, on x i y són funcions del temps. Així doncs, la velocitat eren les derivades de x i y respecte al temps, i obtenia també d'aquesta manera la tangent d'una corba. Es va plantejar també el problema invers, és a dir, trobar la corba $y = y(x)$ a partir del pendent de la corba, i també el càlcul de l'àrea sota una corba donada per una funció contínua. Pel que fa als problemes de màxims i mínims, va establir que la derivada era nul·la en els extrems.

Si l'enfocament de Newton era el de la física, Leibniz va partir del camp de la filosofia, i a ell se li ha d'atribuir el mèrit de crear un llenguatge formal del Càlcul. Un concepte bàsic en les seves teories tant matemàtiques com filosòfiques era el d'*infinitèsim*, que tot i que era una idea molt poc precisa, la podríem definir com una unitat infinítament petita. D'aquí parteix la seva idea de derivada, definint-la com el quocient entre infinitèsims $\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$, on dx és una magnitud infinítament petita. Igual que Newton, tracta els diferents problemes establerts (tangents, àrees sota corbes, etc.) a partir del seu concepte de derivada.

És interesant adonar-se que tots dos van arribar a resultats molt semblants de forma paral·lela seguint camins no tan semblants. Les diferències entre un i l'altre es fonamenten en la manera d'enfocar la qüestió: Newton intentava comprendre la naturalesa i la física, mentre que Leibniz perseguia uns objectius més teòrics, orientats cap a la filosofia.

El concepte de derivada de Newton té sentit com a quocient incremental d'una funció contínua, mentre que per a Leibniz és el quocient d'infinitesimals. El primer resolia els problemes d'àrees i volums amb les derivades de la funció (velocitat de variació), mentre que l'altre utilitzava sumes d'infinitésims. D'aquesta manera es pot entendre que la integral de Newton fos indefinida i la de Leibniz definida.

Newton va arribar a solucions per a problemes concrets i pràctics, mentre que Leibniz va ser capaç de generalitzar més les seves teories. D'aquesta manera, ens van aportar una visió més clara de la naturalesa i l'ús d'un llenguatge matemàtic formal, respectivament. Però, per sobre de tot, van saber crear a partir d'una sèrie de problemes una eina general per abordar-los tots i que és imprescindible avui dia: el Càlcul.

Xavier Gisbert Martín de Hijas
Juan Murcia Delso

Índex

1 Nocions bàsiques

Aquest primer capítol és una recopilació de les nocions i símbols que apareixen en el llenguatge matemàtic. Suposem que aquests símbols o conjunts són coneguts pels estudiants, però hem cregut convenient fer-ne una recopilació ja que d'ara endavant seran part del nostre llenguatge.


Fig 1.1 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Ja hem comentat a la presentació històrica del càlcul que Leibniz està considerat un dels inventors del càlcul.
Leibniz tenia tant de filòsof com de matemàtic, i potser per això la seva contribució més important a la matemàtica, a part del càlcul, va ser en el camp de la lògica. El que més li impressionava del càlcul era el caràcter d'universalitat que presentava, i aquesta mateixa idea fonamental la va aplicar a tots els seus treballs. Leibniz pretenía reduir totes les coses a un ordre, i així, per poder reduir totes les discussions lògiques a una forma sistemàtica, volia desenvolupar una *característica universal* que fos com una àlgebra de la lògica.

El seu primer treball matemàtic va consistir en una tesi sobre anàlisi combinatòria que es va escriure el 1666, i ja a aquesta edat va tenir les primeres idees del que podria ser una lògica formal simbòlica. S'haurien d'introduir uns símbols universals per a un petit nombre de conceptes fonamentals necessaris per al pensament, i a partir d'aquest *alfabet* dels pensaments humans, construir les idees construïdes de la mateixa manera com es construeixen les fórmules en matemàtiques.

1.1 Llenguatge formal i simbologia

Itàlia va prendre una part menys activa en el desenvolupament de l'àlgebra abstracta que França, Alemanya i Anglaterra, però al llarg dels últims anys del segle XIX hi va haver matemàtics italians que es van interessar profundament per la lògica matemàtica. El més conegut de tots ells és Giuseppe Peano (1858-1932). A la seva obra *Formulaire de mathématique* (de 1894 endavant) va intentar desenvolupar un llenguatge formal amb el qual poder expressar no només la lògica matemàtica, sinó també totes les branques més importants de la matemàtica. El fet que el seu programa interessés molts dels seus col·laboradors i deixebles era degut bàsicament al fet que evitava tant les qüestions com el llenguatge metafísic, i sobretot a la seva encertada i senzilla elecció del simbolisme, on hi havia per exemple els símbols $\in$ ("pertany a la classe"), $\cup$ (suma lògica o reunió), $\cap$ (producte lògic o intersecció), $\supset$ ("conté"), etc., molts dels quals es fan servir actualment.

1.1.1 Conjunts numèrics

Nom	*Símbol*	*Definició o descripció*
Naturals	$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, ...\}$
	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} - \{0\}$
Enters	$\mathbb{Z}$	$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
	$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} - \{0\}$
	$\mathbb{Z}^+$	$\{1, 2, 3, ...\}$
	$\mathbb{Z}^-$	$\{..., -3, -2, -1\}$
Racionals	$\mathbb{Q}$	$\{x \in \mathbb{R} :\ x = \frac{a}{b}$ on $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$
	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q} - \{0\}$
	$\mathbb{Q}^+$	$\{x \in \mathbb{Q} :\ x > 0\}$
Reals	$\mathbb{R}$	Conjunt de nombres racionals i irracionals
	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} - \{0\}$
	$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$
Irracionals	$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	Nombres tal que la seva representació decimal no és finita i no es repeteix
Interval tancat	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}$
Interval obert	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$
Interval semiobert	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\}$
Intervals infinits	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
Complexos	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

És probable que en llibres de matemàtiques trobeu la notació $]a, b[$ fent referència a un interval obert, equivalent a (a, b), que és la notació que nosaltres farem servir.

Val a dir que hi ha sectors on $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$, $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} :\ x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 0\}$.

1.1.2 Símbols bàsics

Símbol	*Significat*	*Exemple*
$\in$	pertinença a un conjunt	$a \in A$
$\notin$	no-pertinença a un conjunt	$a \notin A$
$=$	igualtat	$A = B$
$\neq$	desigualtat	$a \neq b$
$\subset$	inclusió de conjunts	$A \subset B$
$\subseteq$	inclusió o igualtat de conjunts	$A \subseteq B$
$\not\subset$	no-inclusió de conjunts	$A \not\subset B$
$\emptyset$	conjunt buit	$A = \emptyset$
$\cup$	unió de conjunts	$A \cup B$
$\cap$	intersecció de conjunts	$A \cap B$
$\times$	producte cartesià	$A \times B$
$<$	menor que	$x < y$
$\leq$	menor o igual que	$x \leq y$
$>$	major que	$x > y$
$\geq$	major o igual que	$x \geq y$
$\{\cdots\}$	conjunt d'elements	$\{a, b\}$
$\mid$	tal que	$a \in A \mid a \geq b$
$-$	diferència de conjunts	$A - B$
$\mathcal{C}_E(\cdot)$	complementari d'un conjunt	$\mathcal{C}_E(A) = E - A$

1.1.3 Quantificadors

Símbol	*Significat*	*Exemple*
$\forall$	per a tot	$\forall a \in A$
$\exists$	existeix	$\exists a \in A$
$\exists!$	existeix i és únic	$\exists! a \in A$
$\nexists$	no existeix	$\nexists a \in A$

1.1.4 Connectors lògics

Símbol	*Exemple*	*Significat*
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	p implica q
$\Leftarrow$	$p \Leftarrow q$	q implica p
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	p es compleix si, i només si, es compleix q
		(p implica q i q implica p)
$\neg$	$\neg p$	no es compleix p
$\wedge$	$p \wedge q$	es compleix p i q
$\vee$	$p \vee q$	es compleix p o q

1.2 Alfabet grec

El llenguatge matemàtic està molt relacionat amb l'alfabet grec i, com que és habitual que l'estudiant de batxillerat no identifiqui correctament les lletres amb el seu nom, hem cregut convenient i interessant recordar-lo.

Nom	*Lletra minúscula*	*Lletra majúscula*
alpha	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
èpsilon	ϵ	E
zeta	ζ	Z
eta	η	H
theta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu, mi	μ	M
nu, ni	ν	N
xi	ξ	Ξ
òmicron	o	O
pi	π	Π
rho	ρ	P
sigma	σ	Σ
tau	τ	T
ípsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
chi	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

2 Mètodes de raonament i demostració

Com ja hem comentat al pròleg, en aquest llibre bàsicament hi trobarem definicions, propietats i teoremes que fan referència a temes bàsics i fonamentals del Càlcul. No hi trobarem les demostracions dels teoremes i propietats, llevat del raonament en algun exemple que ens ha semblat didàctic. És important, però, que un estudiant de Càlcul tingui clar els diferents mètodes de demostració, entenent que una demostració és el procés de deducció que permet deduir de les definicions, mitjançant regles de deducció matemàtica, un cert teorema, lema, proposició o corol·lari determinat.

Abans d'exposar els diferents mètodes de demostració, una petita ressenya històrica ens permetrà situar-los en el temps.

A finals del segle XIX Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) i Giuseppe Peano (1858-1932) van establir els fonaments del sistema dels nombres reals, i això es va aconseguir amb l'estudi del sistema numèric més bàsic: el sistema dels nombres naturals. El matemàtic italià Giuseppe Peano va triar per a la seva fonamentació de l'aritmètica tres conceptes primitius: *zero*, *nombre* (és a dir, nombre natural o enter no negatiu), i la relació binària *és el següent de*, que verifiquen els següents cinc postulats:

1. Zero és un nombre.
2. Si a és un nombre, aleshores el següent de a també és un nombre.
3. Zero no és el següent de cap nombre.
4. Si els següents de dos nombres són iguals, aleshores els nombres mateixos són iguals.
5. Si un conjunt de nombres S conté el zero i també el següent de qualsevol nombre que pertanyi a S, aleshores tot nombre pertany a S.

Aquesta última condició és el principi d'inducció completa. Els axiomes de Peano, que van aparèixer formulats per primera vegada l'any 1889 a l'obra *Arithmetices principia nova methodo exposita*, representen l'intent més notable del segle per reduir l'aritmètica usual a l'estricte simbolisme formalitzat. (Peano va expressar els seus axiomes en simbolisme formal, i no amb paraules de llenguatge corrent, tal com hem fet nosaltres.)

2.1 Proposicions i implicacions

Totes les demostracions i raonaments matemàtics es fonamenten en **proposicions**. Una proposició és un enunciat declaratiu o cadena de símbols intel·ligibles que es pot qualificar com a certa o falsa, i que no pot ser certa i falsa a la vegada (principi d'exclusió). Una **tautologia** és una proposició que sempre és certa, per exemple " $1 = 1$ ". Una **contradicció** és una proposició que sempre és falsa, per exemple " $0 = 1$ ". Perquè una proposició sigui totalment clara és necessari que se n'hagi establert el context adient i s'hagi definit correctament el significat dels signes.

Diem que dues proposicions p i q són **equivalents** si p és certa estrictament quan q és certa (per tant p és falsa estrictament si q és falsa). En aquest cas la notació utilitzada és: $p \equiv q$.

Si p és una proposició, aleshores la seva **negació** és la proposició "no p"que és certa quan p és falsa i és falsa quan p és certa. Notació: $\neg p$.

Si p i q són proposicions, aleshores la seva **conjunció** és la proposició "p i q", que és certa quan p i q són certes alhora i és falsa en la resta de casos. Notació: $p \wedge q$.

Així mateix, la **disjunció** de p i q és la proposició "p o q", que és certa si com a mínim una de les proposicions p i q és certa, i és falsa quan ambdues són falses. Notació: $p \vee q$.

Les **lleis de De Morgan** relacionen la negació, conjunció i disjunció:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

Una manera molt important de formar una nova proposició a partir de proposicions donades és la **implicació** que s'escriu $p \Rightarrow q$,"si p aleshores q"o "p implica q". En aquest cas, p és la **hipòtesi** i q és la **conclusió** de la implicació.

La implicació $p \Rightarrow q$ és equivalent a la implicació

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

que rep el nom de **contrarecíproc** de la implicació $p \Rightarrow q$.

Si tenim una implicació $p \Rightarrow q$, llavors també es pot formar la proposició $q \Rightarrow p$, que rep el nom de **recíproc** de $p \Rightarrow q$. Observem que el contrarecíproc és un equivalent lògic de la implicació, però el recíproc no ho és.

La **doble implicació** (o **bicondicional**) s'escriu com "$p \Leftrightarrow q$"o "p si i només si q" i es defineix com

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$$

Observem que l'equivalència $p \Leftrightarrow q$ és certa quan les proposicions p i q són ambdues certes o ambdues falses.

2.2 Demostracions per contraexemple

Per demostrar que és fals que tot element x d'un conjunt donat A té una certa propietat, és a dir, per demostrar que un enunciat del tipus

$$(\forall x \in A) \Rightarrow p(x)$$

és fals, només cal presentar-ne un contraexemple (és a dir, un element particular x_0 del conjunt que no tingui aquesta propietat).

$$(\exists x_0 \in A) \mid \neg p(x_0)$$

Exemple 2.2.1. *Demostreu que la composició de funcions no és commutativa, és a dir, és fals que*

$$g \circ f = f \circ g$$

Demostració. Considerem $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $g(x) = \cos x$. Aleshores,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \cos x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = (\cos x)^2$$

Com que hem trobat f i g particulars tals que

$$g \circ f \neq f \circ g$$

podem dir que en general no és cert que $g \circ f = f \circ g$ q.e.d.

Observació: "q.e.d"es refereix a *quod erat demostrandum*, expressió en llatí que vol dir: "el que volíem demostrar" i s'acostuma a escriure quan una demostració ha finalitzat.

2.3 Demostracions directes

Siguin p i q proposicions. La **demostració directa** de $p \Rightarrow q$ requereix la construcció d'una cadena de proposicions $r_1, r_2, \cdots, r_n$ tal que

$$p \Rightarrow r_1,\ r_1 \Rightarrow r_2, \cdots, r_n \Rightarrow q$$

Exemple 2.3.1. *Si a i b són dos nombres reals positius aleshores la seva mitjana aritmètica és major o igual que la seva mitjana geomètrica; és a dir,*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Demostració. Si $a, b > 0 \Rightarrow \exists\ a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tals que $a = a_1^2$ i $b = b_1^2$
Per tant:

$$0 \leq (a_1 - b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 = a + b - 2\sqrt{ab} \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

2.4 Demostracions indirectes

Existeixen bàsicament dos tipus de demostracions indirectes: les **demostracions pel contrarecíproc** i les **demostracions per contradicció** o **reducció a l'absurd**. Ambdues s'inicien amb la hipòtesi que la conclusió q és falsa.
Aquest tipus de demostracions són molt habituals, per exemple, en cas d'haver de demostrar la unicitat d'algun concepte.

2.4.1 Demostracions pel contrarecíproc

En lloc de demostrar $p \Rightarrow q$, es pot provar $\neg q \Rightarrow \neg p$. Aquest tipus de demostració és convenient quan hi trobem el quantificador universal.

Exemple 2.4.1. *Sigui $a \geq 0$ un nombre real. Si $\forall \varepsilon > 0\ ,\ 0 \leq a < \varepsilon$, aleshores $a = 0$.*

Demostració. Si $a \neq 0$, llavors com que $a \geq 0$ hem de tenir $a > 0$.
Escollim $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$, llavors tenim $\varepsilon_0 > 0$ i $\varepsilon_0 < a$, d'on deduïm que la hipòtesi $0 \leq a < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ és falsa. q.e.d.

Exemple 2.4.2. *Si m,n són nombres naturals tals que $m + n \geq 10$, aleshores $m \geq 5$ o $n \geq 5$.*

Demostració. Si la conclusió és falsa, llavors es compleix $m < 5$ i $n < 5$ (llei de De Morgan). Al sumar desigualtats, obtenim $m + n < 5 + 5 = 10$, per tant la hipòtesi és falsa. Així doncs, $m + n \geq 10$ si $m \geq 5$ o $n \geq 5$. q.e.d.

2.4.2 Demostracions per reducció a l'absurd

Per demostrar $p \Rightarrow q$ el mètode de reducció a l'absurd consisteix a suposar com a certa $\neg q$ (és a dir, suposar que q és falsa) i raonar lògicament fins a arribar a una contradicció amb la hipòtesi p. Quan passa això es diu que la contradicció prové de suposar que la tesi era falsa (o que l'absurd ha estat aquesta suposició).

Exemple 2.4.3. *$\sqrt{2}$ és un nombre irracional.*

Demostració. Suposem que $\sqrt{2}$ és un nombre racional. Aleshores $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ on p i q són enters primers relatius.
Per tant,

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ parell} \Rightarrow p \text{ parell (múltiple de 2)}$$

Així doncs, $p = 2k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \text{ parell (múltiple de 2)}$$

Per tant, p i q no són primers relatius. *Contradicció.*
Així doncs, $\sqrt{2}$ no pot ser un nombre racional i com que és un real, ha de ser irracional.

q.e.d.

2.5 Demostració per inducció

El mètode de demostració per inducció és molt útil en cas de voler demostrar qualsevol fórmula que es compleixi per a tots els nombres naturals. La propietat més fonamental de $\mathbb{N}$ és el principi d'inducció, que veurem tot seguit.

Per demostrar que una proposició $p(n)$ és certa per a qualsevol nombre natural ($\forall n \in \mathbb{N}$), existeix el principi d'inducció que diu:

1. Si $p(1)$ és cert
2. Si per $n = k$ $p(k)$ certa (hipòtesi d'inducció)$\Rightarrow$ $p(k+1)$ certa

aleshores $p(n)$ és certa $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.5.1. *Demostreu que*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Demostració.

1. Si $n = 1$, es compleix $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$
2. Suposem que es compleix

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \qquad \text{(hipòtesi d'inducció per k=n-1)}$$

i volem veure que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n =$$

$$= \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

Les demostracions per inducció estan molt relacionades amb les definicions recursives i com un exemple de definició recursiva podem considerar la definició de a^n com

$$a^1 = a$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

2.6 Igualtat entre conjunts

Si volem demostrar que dos conjunts A i B són iguals, s'acostuma a utilitzar el mètode de la doble inclusió.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ i } B \subset A$$

Recordem que $A \subset B \Leftrightarrow$ $[\ (\forall x \in A) \Rightarrow x \in B\ ]$

Exemple 2.6.1. *Demostreu que*

$$A \cup (B \cap A) = A \quad \textit{(Llei de simplificació)}$$

Demostració.

$\subset$) Volem veure que $A \cup (B \cap A) \subset A$

$$\text{Si } x \in A \cup (B \cap A) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \acute{o} \\ x \in B \cap A \Rightarrow x \in B \text{ i } x \in A \end{array} \right\} \Rightarrow x \in A$$

per tant, $A \cup (B \cap A) \subset A$.

$\supset$) Volem veure que $A \cup (B \cap A) \supset A$

Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap A)$ per tant,

$$A \subset A \cup (B \cap A) \quad \text{q.e.d.}$$

2.7 Igualtat de funcions

Per demostrar que dues funcions $f : A \to B$ i $g : C \to D$ són iguals, hem de provar que:

1. $A = C$ i $B = D$
2. $(\forall x \in A) \;\; f(x) = g(x)$

3 Factors i desenvolupaments. Binomi de Newton

Fig. 3.1 Isaac Newton (1642-1727)

L'epitafi de Newton, a l'Abadia de Westminster, a Londres, és la fórmula que expressa el binomi $a + b$ elevat a la potència m. La glòria més gran de Newton va ser obtenir, sobre la seva tomba, una fórmula algebraica.

Chafi Haddad

3.1 Productes i factors notables

Quadrat d'una suma: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Quadrat d'una diferència: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Cub d'una suma: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Cub d'una diferència: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Suma per diferència: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Diferència de cubs: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Suma de cubs: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Exercici 3.1.1. *Trobeu l'error del raonament següent, suposant que* $x = y$

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y) \\ x+y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

3.2 Binomi de Newton i coeficients binomials

Definició 3.2.1. (*Factorial*) *Si* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, *definim el* **factorial de n** *com a*

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

El factorial per a $n = 0$ *per conveni s'escriu*

$$0! = 1$$

i això permet que moltes expressions tinguin una formulació més senzilla.

Definició 3.2.2. (*Binomi de Newton*) *Si* $n \in \mathbb{N}$, *llavors*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

on els coeficients, que s'anomenen **coeficients binomials** *es defineixen com a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{essent} \quad \begin{array}{l} n \geq k \geq 0 \\ k \neq 0,\ k \neq n \end{array}$$

Observem que alguns dels resultats de l'apartat 3.1 són casos particulars del binomi de Newton.

El desenvolupament de la fórmula del binomi es pot utilitzar per a altres valors de n (enters i racionals), i aleshores apareixen les sèries infinites.

Propietat 3.2.1. (*Propietats dels coeficients binomials*)

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

5 Còniques i quàdriques

En aquest capítol es defineixen les còniques perquè és important que un estudiant de Càlcul identifiqui aquestes corbes amb les seves equacions. Com a generalització de les còniques trobareu en aquest capítol les equacions de les quàdriques amb la representació gràfica corresponent per tal de poder identificar aquestes superfícies. Les quàdriques són molt importants en l'estudi del càlcul diferencial de diverses variables.

5.1 Còniques

Anomenem còniques les corbes que s'obtenen com la intersecció d'un pla i un con de doble full, considerant que el pla no passa en cap cas pel vèrtex del con, perquè en aquest cas la figura resultant seria una cònica degenerada (punts o bé rectes). Aquestes corbes són corbes planes que es poden escriure com el conjunt de solucions d'una equació de segon grau i són la circumferència, l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola.

- La circumferència és la corba plana que resulta de tallar la superfície d'un con de revolució per un pla paral·lel a la base del con.
- L'el·lipse és la corba plana que resulta de tallar la superfície d'un con de revolució per un pla que no és paral·lel a cap de les seves generatrius.

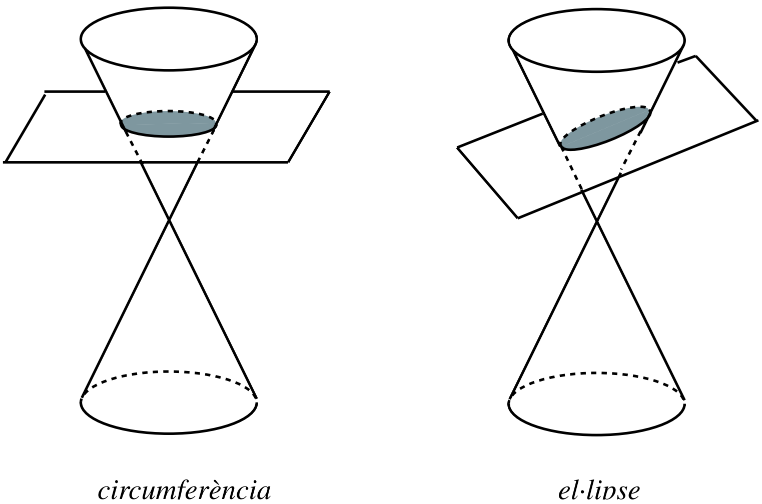

Fig. 5.1

- La paràbola és la corba plana que resulta de tallar una superfície d'un con de revolució per un pla paral·lel a una de les seves generatrius.
- La hipèrbola és la corba plana que resulta de tallar una superfície d'un con de revolució per un pla paral·lel a dues de les seves generatrius.

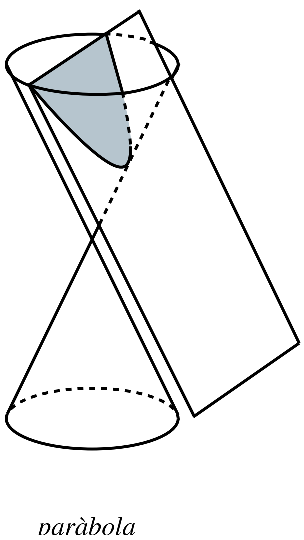

Fig. 5.2

5.1.1 Circumferència

Definició 5.1.1. (*Circumferència*) *Considerem* (a,b) *un punt del pla i* $r > 0$ $(r \in \mathbb{R})$. *Anomenem* **circumferència** *de* **centre** (a,b) *i* **radi** r *el conjunt de punts* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tals que la distància al punt* (a,b) *és* r.

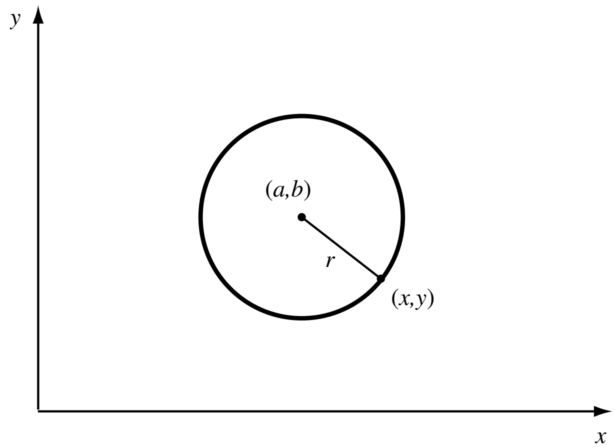

Fig. 5.3

Propietat 5.1.1. (*Equació canònica de la circumferència*) *Un punt* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *pertany a la circumferència de centre* (a,b) *i radi* r *si, i només si,*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

5.2 Quàdriques

Les quàdriques són una generalització de les còniques a $\mathbb{R}^3$ en el sentit que són figures de l'espai de dimensió 3 definides per polinomis quadràtics en les coordenades (x, y, z).

Definició 5.2.1. (*Quàdriques*) *Una quàdrica és el gràfic d'una equació de la forma*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

D'aquesta definició es dedueix que les seccions a les quàdriques per plans paral·lels als plans coordenats (plans xy, xz i yz) són seccions còniques.

Hi ha sis tipus bàsics de superfícies quàdriques:

- el·lipsoide
- hiperboloide d'un full (o reglat, perquè conté rectes)
- hiperboloide de dos fulls (o no reglat, perquè no conté rectes)
- con el·líptic
- paraboloide el·líptic (o no reglat)
- paraboloide hiperbòlic (o reglat)

Estudiem ara quines són les *equacions canòniques* i les figures geomètriques associades a cada una d'aquestes superfícies.

5.2.1 El·lipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

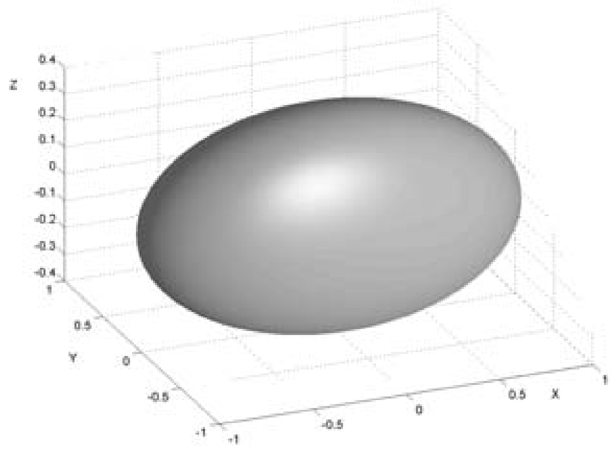

Fig. 5.23 El·lipsoide

Les seccions per plans paral·lels als plans xy, xz i yz són el·lipses.

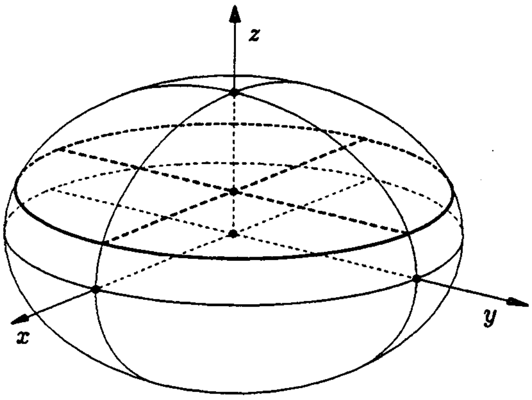

Fig. 5.24

En el cas particular, $a = b = c = r$ tenim una esfera

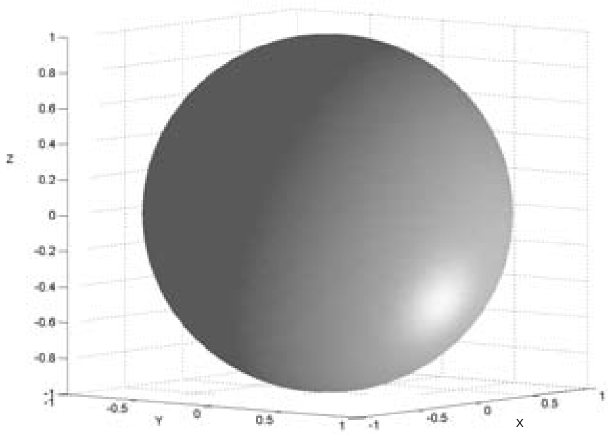

Fig. 5.25 Esfera

5.2.2 Hiperboloide d'un full

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

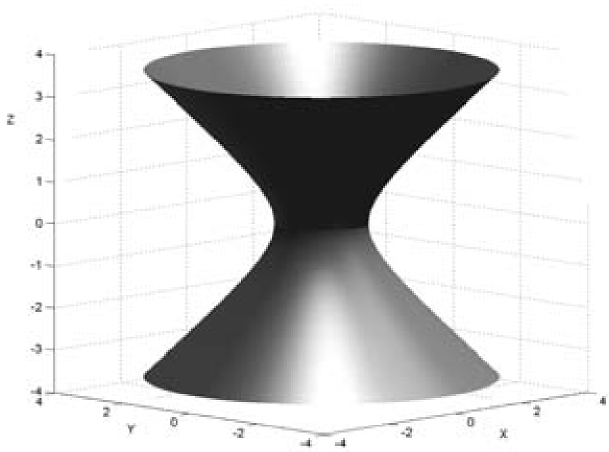

Fig. 5.26 Hiperboloide d'un full

Les seccions per plans:

- paral·lels al pla xy són el·lipses
- paral·lels al pla xz són hipèrboles
- paral·lels al pla yz són hipèrboles

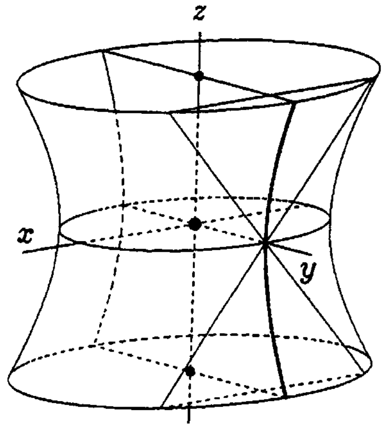

Fig. 5.27

Aquestes superfícies reglades es poden trobar aplicades a l'arquitectura, i de manera molt particular en l'arquitectura gaudiniana. Gaudí va incorporar a l'arquitectura l'hiperboloide d'un full després de descobrir que era una forma òptima com a campana. La trobem a la cúpula central de les cavallerisses de la Finca Güell, als capitells del Palau Güell, a la volta per al gir de carruatges a l'entrada del Parc Güell i en el projecte del temple de la Sagrada Família, on es va transformar en la peça fonamental dels sostres de les naus. Per Gaudí, l'hiperboloide d'un full era la superfície que simbolitzava la llum.

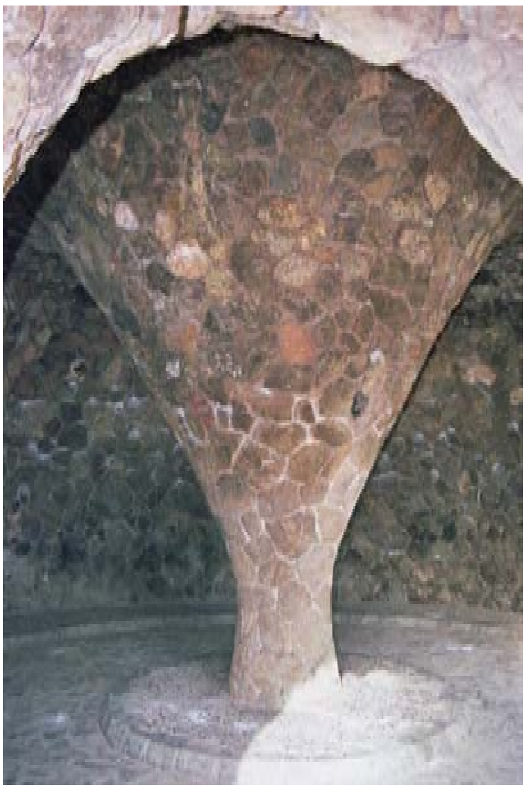

Fig. 5.28 Volta hiperbòlica per al gir de carruatges al Parc Güell

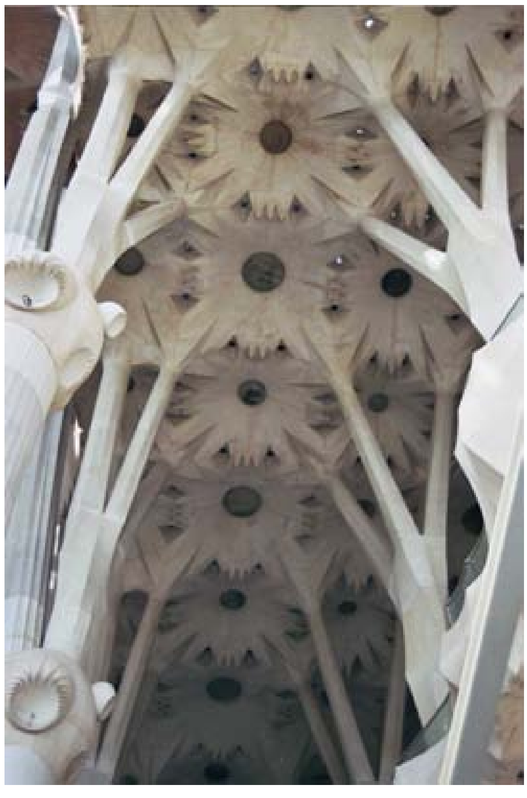

Fig. 5.29 Coberta del temple de la Sagrada Família

6 Geometria clàssica

En aquest capítol tractem conceptes de geometria clàssica perquè hi haurà molts moments en què el llenguatge geomètric estarà present en assignatures de les diferents titulacions d'enginyeria.

A continuació farem referència a dues aplicacions de la geometria en camps ben diferents.

El projecte Galileu és, actualment, la iniciativa més important en el camp espacial a Europa. Les seves aplicacions més importants seran la localització de vehicles i persones, el control de trànsit terrestre, marítim i aeri, el posicionament d'estructures d'enginyeria civil, la prospecció terrestre i marítima, la cartografia, els ajuts a l'agricultura i la pesca...

Xavier Benedicto, enginyer de telecomunicacions de l'ETSETB i director del projecte Galileu a l'Agència Espacial Europea, va respondre la pregunta, per què 30 satèl·lits i a 23.500 metres d'altura? *"És pura geometria. És per garantir el mateix servei a tot el món sense problemes de densitat. Els nostres estudis ens han demostrat tècnicament i econòmicament que escollim la millor òrbita i el millor nombre de satèl·lits. Si estiguéssim més lluny de la Terra, en podríem tenir menys perquè n'abraçaríem més, però per mantenir la mateixa densitat necessitaríem més potència. Si estiguéssim més a prop, en necessitaríem molts més. A més del col·lapse, els satèl·lits a baixa altura van massa ràpid i podrien ocasionar problemes."*

El text següent fa referència a l'obra de Gaudí.

"En general, i és clar que hi ha excepcions, l'arquitectura convencional s'ha fet a partir d'una geometria que, malgrat emprar formes simples (com els triangles, els quadrats i els cercles en el pla, i els prismes, els cubs, les piràmides, els cilindres, les esferes, etc., en l'espai), és el resultat de l'aplicació rigorosa del regle i el compàs. Per això, quan Gaudí va descobrir -evidentment, no les va inventar- les denominades superfícies reglades, compostes per línies rectes, que determinen superfícies corbes en l'espai, com el paraboloide, l'hiperboloide, l'helicoide i les que se'n deriven, va trobar un camp d'exploració que el va fascinar tant que hi va dedicar els darrers anys de la seva vida. I és que les superfícies reglades, les quals, d'altra banda, són fàcils de resoldre constructivament, li van permetre ampliar el repertori de les seves formes i aconseguir solucions fins aleshores inèdites, tant com els murs com en les voltes o cobertes.
Dues són les vies que van portar Gaudí a treballar amb la geometria de l'espai reglat: una és l'anàlisi que des de la seva infantesa havia fet de les formes naturals (troncs d'arbres, ossos, crustacis, etc.), i l'altra, el seu domini de la geometria de l'espai i la necessitat que tenia d'experimentar amb les tres dimensions. (...)
La manera com Gaudí entenia la ciència i la tècnica és pròxima a la de Leonardo, que ho pas-

sava tot pel sedàs de l'experimentació. Els dos van arribar a la teoria a partir de l'observació i l'anàlisi i, en aquest procés, el dibuix, les maquetes, les provatures, etc. són essencials. Per això Leonardo i Gaudí, Gaudí i Leonardo van poder anar més enllà de les superfícies i descobrir les forces internes dels cossos. Això, no obstant, la de Gaudí no és una geometria com la que Leonardo va denominar De ludo geometrico*, que permet jugar amb les formes i les proporcions. Tot al contrari, la seva és una geometria destinada a facilitar els processos constructius, per treure el màxim profit de les fórmules tradicionals i assegurar l'estabilitat dels edificis. La de Gaudí és una geometria que neix de les descobertes personals que fa després d'una recerca continuada. Gaudí va dir: "Sóc geòmetra, és a dir, sintètic", "Jo ho calculo tot", "La geometria en l'execució de les superfícies no complica, sinó que simplifica la construcció".*[19]

Si voleu ampliar la informació d'aquest capítol, trobareu una bona referència a la pàgina *http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html*, i especialment als apartats Plane Geometry i Solid Geometry.

6.1 Polígons

Definició 6.1.1. (*Polígon*) *Un* **polígon** *és una figura plana tancada de n costats rectilinis. Si tots els costats tenen la mateixa longitud i els angles del polígon són iguals, el polígon s'anomena* **regular**.

La paraula *polígon* prové del grec de $\pi o \lambda \upsilon$ (poly) i $\gamma \omega \nu \iota \alpha$ (gonia) que vol dir angle.
Les formes poligonals planes estàn molt presents en l'obra de Gaudí en dos àmbits: com a formes determinants d'elements constructius (plantes, finestres, separadors, rajoles, etc.) i com a formes generadores de decoració (ceràmica, lletres, trencadís, etc.).
Els polígons plans regulars més usuals són els triangles, els quadrats, els pentàgons, els hexàgons, els octàgons, els decàgons i els dodecàgons. En són exemples emblemàtics, entre d'altres, els triangles de maó de Bellesguard, les rajoles quadrades de la Casa Vicens, les finestres pentagonals del Capricho i les rajoles hexagonals del passeig de Gràcia de Barcelona.

Fig. 6.1 Mosaic de parquet de la Casa Milà

7 Nombres complexos

A principis del segle XIX, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) i William Rowan Hamilton (1805-1865) independentment i gairebé al mateix temps van proposar la idea de definir els nombres complexos com a parells ordenats (a, b) de nombres reals que tenen unes certes propietats. Aquesta idea és la que us presentem a continuació.

7.1 Definicions

Definició 7.1.1. (*Nombre complex*) *Es defineix el conjunt* $\mathbb{C}$ *dels nombres complexos com el producte cartesià*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b, \in \mathbb{R}\}$$

és a dir, que un nombre complex s'identifica amb un punt del pla.
Si $z = (a, b)$ *és un nombre complex, direm que* a *és la part* **real** *de* z *i s'escriu* $Re(z)$ *i que* b *és la part* **imaginària** *de* z *que escriurem* $Im(z)$. *Direm que* $z = (a, b)$ *està expressat en* **forma cartesiana**.

Definició 7.1.2. (*Operacions suma i producte*) *Si* (a, b) *i* (c, d) *són dos nombres complexos, definim*

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d)\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Amb aquestes operacions, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *és un cos conmutatiu.*

Definició 7.1.3. (*Unitat imaginària*) *Es defineix* i *el nombre complex* $i = (0, 1)$.

En assignatures, com per exemple electrotècnica, la unitat imaginària s'acostuma a escriure amb la lletra j.
Observem que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Com que els nombres complexos de la forma $(a, 0)$ tenen exactament el mateix comportament respecte a la suma i multiplicació de nombres complexos que els nombres reals respecte a les seves operacions de suma i producte, escriurem $(a, 0)$ simplement com a a.
Per tant,

$$i^2 = -1$$

Observeu que $\sqrt{-1} = \pm i$, per tant, quan treballem amb nombres complexos té sentit treballar amb arrels de nombre negatiu, cosa que no té sentit quan estem en $\mathbb{R}$.
Fixem-nos que podem escriure

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

Aquesta és una forma molt habitual d'escriure els nombres complexos i s'anomena **forma binòmica**.

Definició 7.1.4. (*Oposat*) *Si* $z = (a, b)$ *direm que l'***oposat** *de* z *és el nombre complex*

$$-z = (-a, -b)$$

Definició 7.1.5. (*Conjugat*) *Si* $z = a + bi$ *definim el seu* **conjugat***, que escriurem* $\overline{z}$*, com a*

$$\overline{z} = a - bi$$

Definició 7.1.6. (*Invers*) *Si* $z = a + bi$*, amb* $(a, b) \neq (0, 0)$*, es defineix el nombre complex* **invers** *de* z*, que escriurem* z^{-1}*, com a*

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$$

Vegem ara quina és en aquest cas la seva part real i la seva part imaginària,

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Comproveu que

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = (1, 0)$$

Definició 7.1.7. (*Mòdul*) *Si* $z = a + bi$ *és un nombre complex, definim el seu* **mòdul***, que escriurem* $|z|$*, com a*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observeu que $|z|$ *és la distància de* z *a* $(0, 0)$*. En general, la* **distància** *entre dos nombres complexos* z *i* w *es defineix com a* $|z - w|$

Propietat 7.1.1. *Si* z *i* w *són nombres complexos, es compleix*

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z} = z \iff z$ *és real*
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
4. $\overline{-z} = -(\overline{z})$
5. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
6. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$*, si* $z \neq 0$
7. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
8. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
9. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Exemple 7.1.1. *Proveu que si* $z, z' \in \mathbb{C}$*, es verifica que:*

$$|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}(|z + z'|^2 + |z - z'|^2)$$

8 Polinomis reals

En aquest capítol estudiarem els polinomis definits a nivell de matemàtiques elementals i ens interessa recordar-ne les operacions algebraiques i l'estudi de les arrels i factorització dels polinomis. En un curs més elevat d'àlgebra, es defineixen els polinomis com una successió de nombres i de manera totalment coherent amb el que ara estudiarem.

8.1 Definicions i exemples

Definició 8.1.1. (*Polinomi*) *Definim un* **polinomi real** *com a*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

essent $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *nombres reals que s'anomenen coeficients i* x *una variable indeterminada. Aquesta forma s'anomena expressió canònica del polinomi.*

1. Si $a_n \neq 0$ direm que aquest polinomi té **grau** n.

2. Anomenem $\mathbb{R}[x]$ el conjunt dels polinomis reals, és a dir, dels polinomis amb coeficients reals.

3. Direm que dos polinomis són iguals si tenen iguals els seus coeficients respectius. Per tant, donats dos polinomis $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, direm que
$$(p(x) = q(x)) \Longleftrightarrow (n = m \quad i \quad a_i = b_i \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n)$$

Definició 8.1.2. (*Funció polinòmica*) *A tot polinomi real* $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ *se li pot associar una funció* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida per*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

anomenada funció polinòmica associada al polinomi.

Exemple 8.1.1. (*Exemples de funcions polinòmiques*)

1. *Funció constant:* $f(x) = a$

2. *Funció afí:* $f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$

3. *Funció quadràtica:* $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

4. *Funció cúbica:* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$

8.2 Àlgebra de polinomis

Si $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis reals

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad i \quad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

definim

1. *suma*
$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_r + b_r)x^r$$
$$\text{essent } r = m\grave{a}x\{m, n\}$$

2. *producte per escalar*
$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n \quad (\text{essent } \lambda \in \mathbb{R})$$

3. *producte*
$$p(x)q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$$
$$\text{on } c_h = \sum_{i+j=h} a_ib_j \quad \begin{array}{l}(0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m)\\ \forall h = 0, 1, \cdots, n+m\end{array}$$

Exemple 8.2.1. *Si $p(x) = 2x^3 + 5x - 7$ i $q(x) = x^2 - 2x + 1$ calculeu $p(x) + q(x)$ i $p(x)q(x)$.*

Per sumar i multiplicar polinomis s'acostumen a escriure tal com ho farem en aquest exemple. Aquesta metodologia permet simplificar molt el càlcul d'aquestes dues operacions.

suma
$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & & +5x & -7 \\ & x^2 & -2x & +1 \\ \hline 2x^3 & +x^2 & +3x & -6 \end{array}$$

D'aquesta manera obtenim $p(x) + q(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 6$.

producte
$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x^3 & & +5x & -7 \\ & & & x^2 & -2x & +1 \\ \cline{3-6} & & 2x^3 & & +5x & -7 \\ & -4x^4 & & -10x^2 & +14x & \\ 2x^5 & & +5x^3 & -7x^2 & & \\ \hline 2x^5 & -4x^4 & +7x^3 & -17x^2 & +19x & -7 \end{array}$$

D'aquesta manera obtenim $p(x)q(x) = 2x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 17x^2 + 19x - 7$.

Exemple 8.2.2. *Donats els polinomis $p(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + \frac{1}{4}$, $q(x) = 3x^2 - 2x^3 + \frac{1}{3}x + 4$ i $r(x) = 5x^2 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2}$, calculeu $p(x) + q(x) + r(x)$.*

$$\begin{array}{rrrr} 1/2x^3 & & -4x & +1/4 \\ -2x^3 & 3x^2 & +1/3x & +4 \\ 3/4x^3 & +5x^2 & -1/5x & +3/2 \\ \hline -3/4x^3 & +8x^2 & -58/15x & +23/4 \end{array}$$

9 Trigonometria. Funcions trigonomètriques

La trigonometria i les funcions trigonomètriques tenen molta importància en gairebé totes les assignatures de les diferents titulacions d'enginyeria, per tant és indispensable el seu bon coneixement.

Els egipcis i babilonis ja coneixien i havien utilitzat propietats relatives a les raons entre els costats de triangles semblants, encara que sense escriure-ho de manera explícita. Es diu que Thales de Milet (ca. 624-548 a. C.) i Pitàgoras de Samos (ca. 580-500 a. C.) van aprendre geometria a Egipte i a Babilònia.

Amb els grecs ens trobem per primera vegada amb un estudi sistemàtic de les relacions entre els angles centrals d'un cercle i les longituts de les cordes corresponents. A les obres d'Euclides (aprox. 300 a. C.) no hi ha trigonometria en el sentit estricte, però sí que hi ha teoremes equivalents a lleis o fórmules trigonomètriques concretes. A la segona meitat del segle II a. C. sembla que es va compondre la primera taula trigonomètrica per part de l'astrònom Hiparc de Nicea (180 a. C., 125 a. C.) i des de l'època d'Hiparc fins a l'edat moderna no hi va haver res semblant a les nostres raons trigonomètriques.

El francès François Viète (1540-1603) està considerat el pare de la visió analítica de la trigonometria. Ell va considerar la trigonometria com una branca independent de la matemàtica i va calcular unes taules de les sis funcions trigonomètriques per a angles de minut a minut, encara que llevat de la funció sinus no va utilitzar els noms actuals de les funcions trigonomètriques.

Entre les aplicacions a la trigonometria podem destacar la resolució de triangles i el seu ús en topografia. Una de les fites més importants en topografia fou la mesura, mitjançant triangulacions, de l'arc meridià que hi ha entre París i Barcelona, i aquesta mesura es va fer servir per donar la primera definició de metre, base del sistema mètric decimal. Si aneu d'excursió per la pista forestal que va d'Ogassa a Camprodon, a la comarca del Ripollès, passareu per aquest meridià i hi trobareu un petit monument que fa referència a la unitat de longitud del metre.

Fig. 9.1 Definició de la unitat de longitud (el metre)

9.1 Mesura d'angles

El primer objectiu d'aquest capítol és familiaritzar-nos amb els diferents sistemes de mesura d'angles: el sexagesimal i el radian. La mesura en radians és la més usada en càlculs científics. Els angles positius són els que es medeixen en sentit contrari al de les agulles d'un rellotge, i els negatius en el sentit de les agulles del rellotge.

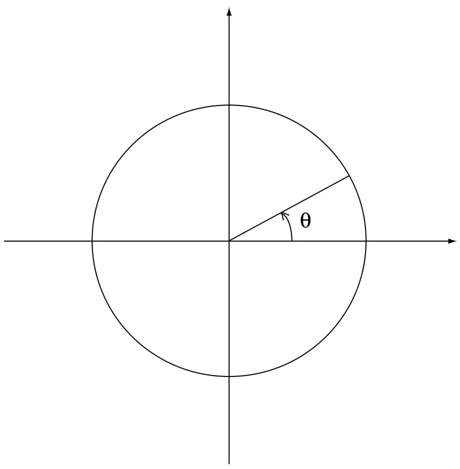

Fig. 9.2 Angle positiu

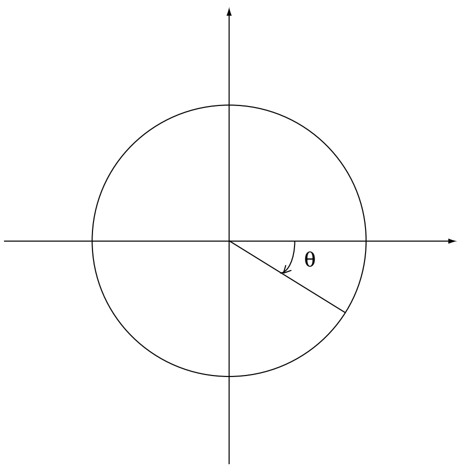

Fig. 9.3 Angle negatiu

Recordem que en una circumferència, un angle de “volta sencera” s'associa a 360 graus, “mitja volta” és 180 graus, i per tant “un quart de volta” és l'angle de 90 graus.

Una altra unitat de mesura d'angles és el radian.

10 Funcions exponencials i funcions logarítmiques

Les funcions exponencials històricament es solen atribuir a Jean Bernoulli (1667-1748) perquè es va dedicar a estudiar no només les corbes exponencials simples $y = a^x$, sinó també les exponencials generals, com ara $y = x^x$. Al calcular l'àrea limitada per la corba $y = x$, i les rectes $x = 0$ i $x = 1$, va trobar la sorprenent representació en forma de sèrie

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

resultat que va obtenir d'escriure $x^x = e^{x \ln x}$, desenvolupant amb la sèrie de la funció exponencial i integrant terme per terme, utilitzant el mètode d'integració per parts.

10.1 Funció exponencial

Definició 10.1.1. (*Funció exponencial*) *Donat a un nombre real estrictament positiu diferent de 1* ($a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$)*, definim la funció exponencial de base a com la funció real de variable real*

$$\begin{array}{rll} exp_a\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow exp_a(x) = a^x \end{array}$$

Observem que si $a < 0$, hi ha valors de $x \in \mathbb{R}$ tals que a^x no és un nombre real. Per exemple, si $a = -2$ i $x = -\frac{1}{2}$, $(-2)^{-1/2} = \dfrac{1}{(-2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{-2}} \notin \mathbb{R}$.

Representació gràfica

Els gràfics de les figures s'han obtingut amb MAPLE, tal com indica la figura 10.1.

Si $a > 1$, la funció exponencial és estrictament creixent en $\mathbb{R}$, veiem a la figura 10.1 el cas particular de $a = 2$.

```
> plot(2^x,x=-2..2,y=-1..4);
```

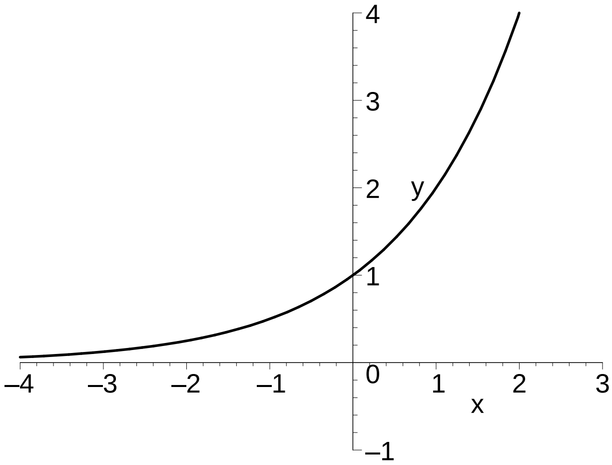

Fig. 10.1 Gràfic de la funció 2^x

Si $0 < a < 1$, la funció és estrictament decreixent en $\mathbb{R}$, tal com es veu a la figura 10.2

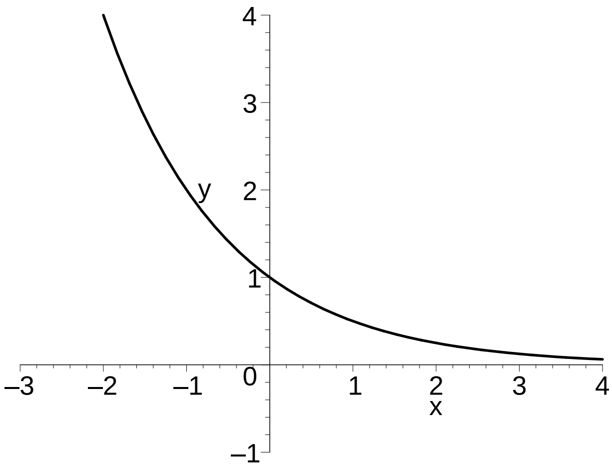

Fig. 10.2 Gràfic de la funció $(\frac{1}{2})^x$

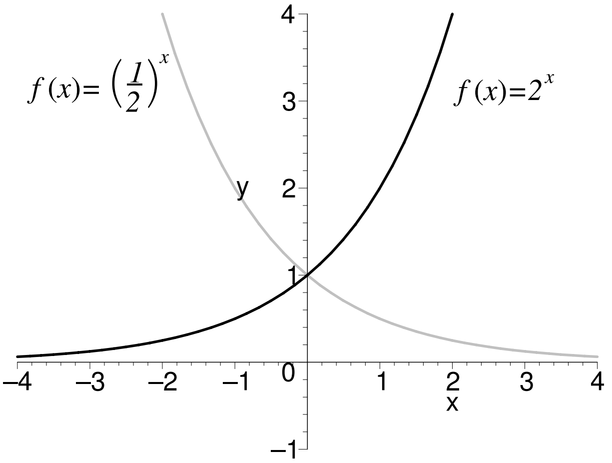

Fig. 10.3 Gràfics de les funcions 2^x i $(\frac{1}{2})^x$

11 Funcions reals de variable real. Límits i continuïtat

No cal dir que les funcions són les eines bàsiques de l'estudi del Càlcul. Per tant, és molt important saber treballar amb elles i amb els seus conceptes associats. En aquest capítol destacarem la importància del concepte de límit i de continuïtat d'una funció real de variable real.

L'alemany Karl Weierstrass (1815-1897) de la Universitat de Berlín a més de donar una definició satisfactòria de nombre real, va obtenir una definició depurada del concepte de límit. La definició d' Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) -el matemàtic francès més important de la seva època- utilitzava expressions del tipus "valors successius", "aproximar-se indefinidament", o "tan petit com un vulgui", que tot i que són interessants des del punt de vista pedagògic, els manca la precisió que s'espera de les matemàtiques.

H.E. Heine (1821-1881), deixeble de Weierstrass, en la seva obra *Elemente* de 1872, escrita sota la influència directa de Weierstrass, definia el límit d'una funció $f(x)$ en x_0 de la següent forma:

> Si donat qualssevol ε, existeix un η_0 tal que per a $0 < \eta < \eta_0$, la diferència $f(x_0 \pm \eta) - L$ és més petita en valor absolut que ε, aleshores es diu que L es el límit de $f(x)$ per a $x = x_0$.

Tant el llenguatge com el simbolisme utilitzats per Weierstrass i per Heine, precisos i inequívocs, van desterrar de l'anàlisi els recursos d'idees intuïtives per donar lloc a la precisió lògica. Es pot dir que havia arribat l'"Edat del Rigor". Actualment la η de Weierstrass s'ha substituït, gairebé universalment, per una altra lletra grega, la δ, però aquest ha estat pràcticament l'únic canvi, i la definició de límit d'una funció que apareix en els texts és essencialment la mateixa que varen introduir Weierstrass i Heine fa poc més d'un segle.

11.1 Definicions bàsiques

Definició 11.1.1. *Definim* **funció** *o* **aplicació** *qualsevol terna* (A, B, f) *formada per dos conjunts no buits* A *i* B *i una correspondència* f *entre ells que assigna a cada element* $x \in A$ *un únic element* $y = f(x) \in B$.

El conjunt A *s'anomena* **domini** *de la funció i s'escriu* $A = Dom f$. B *és el* **conjunt d'arribada** *de la funció. Si* (A, B, f) *és una funció, direm que* f *és una funció de* A *en* B *i s'escriu* $f : A \longrightarrow B$ *o bé* $A \xrightarrow{f} B$. *Si* $A \subset \mathbb{R}$ *direm que la funció és* **de variable real o d'una**

variable; *i si $B \subset \mathbb{R}$ direm que la funció és* **real**. *Al nombre $y = f(x)$ se l'anomena* **valor** *o la imatge de f en x. Direm que x és la* **variable independent** *perquè pot prendre qualsevol valor del domini, i anomenarem y la* **variable dependent** *perquè el seu valor numèric depèn del valor x.*

Definició 11.1.2. *Considerem la funció $f : A \longrightarrow B$.*

1. *El conjunt*
$$f(A) = \{y \in B \mid y = f(x),\ x \in A\}$$
l'anomenem **recorregut** *o* **imatge** *de f. S'escriu Imf.*

2. *El* **gràfic** *de f és el subconjunt de $A \times B$ definit per*
$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

3. *Si $y \in B$ s'anomena* **antiimatge** *o* **imatge inversa** *de y el subconjunt de A donat per*
$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

4. *Si $B' \subset B$, s'anomena* **antiimatge** *de B' el subconjunt de A donat per*
$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

5. *Si $D \subset A$, s'anomena* **restricció** *de f a D l'aplicació $f|_D : D \longrightarrow B$ definida per $f|_D(x) = f(x)$.*

Definició 11.1.3. *Si $f : A \longrightarrow B$ és una aplicació, llavors*

1. *f és* **injectiva** $\Leftrightarrow [\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\ ] \Leftrightarrow [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\ ]$

2. *f és* **exhaustiva** $\Leftrightarrow [\ \forall y \in B \ \ \exists x \in A \mid f(x) = y\ ]$

3. *f és* **bijectiva** $\Leftrightarrow$ [*f és injectiva i f és exhaustiva*]

Observem que hi ha figures geomètriques tan importants com per exemple les circumferències o les el·lipses que no es poden transformar en el gràfic d'una funció. No obstant això, l'estudi d'aquestes figures geomètriques es pot reduir a l'estudi de les funcions. Per exemple, les circumferències de centre $(0,0)$ i radi $r > 0$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
estan formades pels gràfics de dues funcions:
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad -r \leq x \leq r$$
$$\text{i}$$
$$g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \qquad -r \leq x \leq r$$
Observem que aquestes funcions f i g no són úniques.

També és interessant comentar que hi ha funcions el gràfic dels quals és impossible de dibuixar. Per exemple, la funció
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \ \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$
El gràfic d'aquesta funció ha de contenir infinits punts de l'eix horitzontal i també infinits punts de la recta $y = 1$, però no pot contenir cap d'aquestes línies enterament.

12 Derivades de les funcions elementals

Aquest capítol es dedica fonamentalment a l'estudi de la derivada d'una funció, concepte bàsic del càlcul diferencial.

El 1682 va aparèixer la primera gran revista científica internacional, l'*Acta Eruditorum*, on Leibniz va publicar un darrere l'altre els resultats que constitueixen els fonaments del càlcul infinitesimal. L'*Acta* de 1684 conté el que es considera com el primer tractat sobre càlcul diferencial, amb un títol que deia aproximadament *Un nou mètode per a màxims, mínims i tangents que també serveix per a valors fraccionaris i irracionals i que per tant constitueix un tipus de càlcul sense precedents.* Allà va aparèixer per primera vegada imprès el símbol d i enunciades les regles de diferenciació de la suma, diferència, producte, quocient, regla de la cadena, la derivada segona, la resolució d'equacions diferencials per separació de variables i les condicions $dv = 0$ per al càlcul de valors extrems i $ddv = 0$ pel que fa als punts d'inflexió.

L'any 1676 Newton va escriure el *Quadratura curvarum*, que va ser publicat el 1704 i on intenta acabar amb la notació d'infinitament petit, introduint el *mètode de les raons primeres i últimes*, que correspon a la formació de la derivada com a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

i representa l'última i definitiva concepció de Newton pel que fa al càlcul infinitesimal.
Fins a principis del segle XIX, no es va concloure la fonamentació del càlcul, superant els problemes de rigor, sobretot pel que fa referència al concepte de quantitats infinitament petites.

12.1 Definicions bàsiques

Definició 12.1.1. (*Derivabilitat d'una funció en un punt*) *Sigui* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *funció definida en un interval obert* I *i considerem un punt* $a \in I$. *Direm que* f **és derivable en** a *si existeix el límit,*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

i en cas que existeixi i sigui finit s'anomena derivada de f *en* a. *També s'utilitza la notació* $Df(a)$ *o bé, en assignatures més tècniques,* $\dot{f}(a)$.

Definició 12.1.2. (*Derivabilitat en un conjunt*) *Direm que una funció* $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és derivable a* $I \subset A$ *si* f *és derivable en tot punt del conjunt* I. *Aquest conjunt s'anomena domini de derivabilitat de* f *i habitualment és un interval obert* $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Definició 12.1.3. (*Funció derivada*) *Si* $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és derivable* $\forall x \in I$, *s'anomena* **funció derivada** *de* f *l'aplicació*

$$\begin{array}{rll} f'\colon & I & \to \mathbb{R} \\ & x & \to f'(x) \end{array}$$

Exemple 12.1.1. *Estudieu la derivabilitat de la funció* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida per*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x^3 + 4x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punt x=0.

Si existeix $f'(0)$ serà el valor del $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
Com que el valor de $f(x)$ depèn de si $x > 0$ o $x < 0$, per calcular el límit hem de considerar els límits laterals (recordem que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (límit lateral per la dreta) vol dir considerar $x > a$ i $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (límit lateral per l'esquerra) vol dir considerar valors x tals que $x > a$.

El límit existirà en cas que existeixin els dos límits laterals i coincideixin.

Calculem, doncs, els límits laterals del nostre exemple

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x^3+4x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x^2 + 4x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 \end{array}$$

Per tant, f és derivable a $x = 0$ i $f'(0) = 0$.

Exemple 12.1.2. *Estudieu la derivabilitat de la funció valor absolut a l'origen de coordenades.*

Recordem que $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ està definida per $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Aquesta funció és derivable a $x = 0$ si existeix

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Calculem, doncs, els límits laterals

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{array}$$

Com que els límits laterals no coincideixen, podem afirmar que el límit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ no existeix i, per tant, la funció valor absolut no és derivable a l'origen de coordenades.

13 Aplicacions de la derivada

El concepte de funció derivada és una eina fonamental en les enginyeries. Podem trobar la derivada dins de moltíssimes expressions que expliquen comportaments físics que s'estudien, de vegades en expressions molt complexes, però també en altres relacions molt senzilles entre variables, establertes unes hipòtesis significatives.

N'és un clar exemple el càlcul del cabal d'aigua que s'infiltra pel sòl entre dos embassaments com els de la figura 13.1, suposant que el flux d'aigua és unidireccional (seguint la direcció de l'eix de les x) i el fons és impermeable (no s'infiltra aigua cap avall). Podem trobar el cabal d'aigua a partir de la variació de l'energia de l'aigua per unitat de pes en cada punt, i per tant mitjançant una expressió que conté la seva derivada.

$$Q = -kA\frac{dh}{dx}$$

On

- Q és el cabal d'aigua expressat en $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$
- A l'àrea de la secció estudiada expressada en m^2
- h l'energia de l'aigua del terreny per unitat de pes expressada en m
- k la permeabilitat del sòl expressada en $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

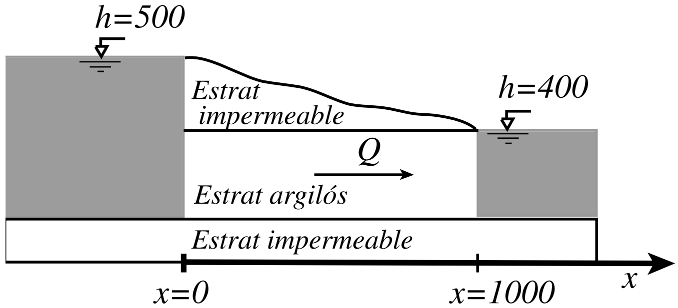

Fig 13.1

Suposant que tenim

- un estrat llimós per on es filtra l'aigua de 20 m de profunditat amb permeabilitat $k = 10^{-3}\frac{cm}{s} = 10^{-5}\frac{m}{s}$

- un estrat impermeable (no pot passar aigua) sota l'estrat llimós
- els embassaments tenen una amplada de 100 m, estan a cota 500 m i 400 m respectivament i disten 1 km
- la pèrdua d'energia és lineal amb la distància

Com que la pèrdua d'energia és lineal, podem establir la següent llei d'energies:

$$h(x) = \frac{400m - 500m}{1000m} x + 500 = -0,1x + 500$$

Per tant,

$$\frac{dh}{dx} = -0,1$$

Aplicant la fórmula presentada, el cabal val

$$Q = Q_x = -10^{-5}\frac{m}{s} \cdot 100m \cdot 20m \cdot (-0,1) = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{s} = 172\ \frac{m^3}{dia}$$

Per tant, tenim una pèrdua del primer embassament cap al segon de 172 $\frac{m^3}{dia}$

13.1 Regla de l'Hôpital

El matemàtic francès Guillaume F. A. de l'Hôpital (1661-1704), marquès de l'Hôpital, va publicar una fórmula coneguda com la regla a finals del segle XVII. De fet, aquesta regla es diu que va ser descoberta pel mestre de l'Hôpital, Johann Bernoulli (1667-1748).

Teorema 13.1.1. (*Regla de l'Hôpital*) *Siguin f i g dues funcions derivables en (a, b), on $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ i amb $g'(x) \neq 0$ en un entorn de a.*

1. *Si* $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ *i* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, *on l pot ser un nombre real,* $-\infty$ o bé $+\infty$, *aleshores*
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$
2. *Si* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ *i* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, *on l pot ser un nombre real,* $-\infty$ o bé $+\infty$, *aleshores*
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Un enunciat anàleg és cert en el punt b.

Exemple 13.1.1. *Calculeu*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

Com que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

aplicant la regla de l'Hôpital, deduïm que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

14 Càlcul de primitives

El càlcul integral té els origens en el problema de calcular l'àrea sota una corba plana.

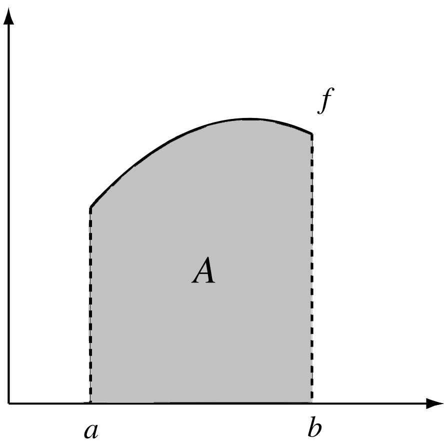

Fig. 14.1

L'any 1686, a l'assaig *De geometria recondita*, de Gottfred Wilhelm Leibniz, s'exposen les regles fonamentals del càlcul integral, s'indiquen el caràcter invers de les operacions d' integració i diferenciació i s'utilitza per primera vegada el símbol $\int$ (inicial gòtica de la paraula suma), però Leibniz encara fa servir l' expressió *methodus tangentium inversa* o *calculus summatorius*. La primera vegada que es va utilitzar el terme *integral* va ser Jakob Bernoulli (1655-1705) l'any 1690, i el 1698 Leibniz i Johan Bernoulli (1667-1748) van acordar la notació *calculus integralis*. Cauchy va introduir molt més rigor en el desenvolupament de la teoria de la integral que va ser generalitzada més endavant per Riemann i finalment per Lebesgue (1875-1941).

Isaac Barrow (1630-1677) va escriure l'anomenada regla de Barrow, on es relacionen els conceptes de derivada i integral i es fa possible el càlcul d'una integral d'una funció real de variable real definida en un interval utilitzant el concepte de funció primitiva que donarem tot seguit. La regla de Barrow dirà que si
$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua que té primitiva una funció F, aleshores,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Per tant, entenem el càlcul de primitives com l'element essencial del càlcul integral.

En aquest capítol veurem mètodes que permeten calcular primitives d'una gran varietat de funcions. Estudiarem el mètode d'integració per parts, el teorema del canvi de variable i donarem els mètodes més usuals de càlcul de primitives per a funcions racionals, trigonomètriques i irracionals. D'altra banda, el càlcul de primitives és un bon tema per desenvolupar les habilitats de càlcul, important en totes les branques de les matemàtiques.

Actualment hi ha sistemes d'integració simbòlica molt bons que permeten calcular primitives, tot i que per poder-los utilitzar s'han de conèixer certes tècniques d'integració. Nosaltres introduirem i comentarem exemples fets amb MAPLE 7, INTEGRATOR i WIRIS, sistemes que permeten obtenir ràpidament les integrals de moltes funcions. Hem de tenir molt clar que el perfeccionament de la tecnologia fa que la metodologia a vegades perdi importància, però en cap cas perden importància les idees i els mètodes de raonament.

14.1 Primitives i integral indefinida

Definició 14.1.1. (Primitiva d'una funció real de variable real) *Direm que F és una primitiva de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que se suposarà acotada, si F és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b) amb $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.*

Definició 14.1.2. (Integral indefinida) *Si F és una primitiva de f en $[a,b]$ llavors qualsevol altra primitiva G difereix de F en una constant, és a dir $G(x) = F(x) + C$. Al conjunt de totes les funcions primitives de f en $[a,b]$ l'anomenem integral indefinida de f en $[a,b]$ i se simbolitza mitjançant $\int f(x)dx$.*

$$\int f = \{F + C \mid F' = f,\ C \text{ constant}\}$$

14.1.1 Integrals immediates

La definició de primitiva permet entendre el procés d'integració com un procés de derivació inversa o antiderivació. Les regles de derivació de les funcions més usuals condueixen a l'anomenada taula d'integrals immediates, i va ser Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui va construir la primera taula d'integrals. No existeix un criteri objectiu per determinar si una integral és o no immediata, d'aquí que la taula pugui aparèixer amb diferent nombre d'entrades segons la font. (C indica una constant qualsevol.)

$$\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1) \\
\int e^x dx &= e^x + C
\end{aligned}$$